中·学·数·学·竞·赛·辅·导·丛·书

斐波那契数列

康士凯 编著

上海科技教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE JINGSAI FUDAO CONGSHU

FEIBONAQI SHULIE

KANG SHIKAI BIANZHU

SHANGHAI KEJI JIAOYU CHUBANSHE

中学数学竞赛辅导丛书

斐波那契数列

康士凯　编著

上海科技教育出版社

目　录

引　言

莱昂纳多(Leonardo，约 1170～1240)是中世纪意大利的著名数学家，又名斐波那契(Fibonacci).他在1202年完成了一本《算盘书》的书，该书介绍了印度-阿拉伯数系以及东方各国(主要是阿拉伯国家)的算术与代数知识，后广为流传，对传播印度-阿拉伯数学和把阿拉伯数学介绍到欧洲起过重要的作用。

在1228年完成的修订本中有一个有趣的问题：

"由一对小兔子开始，一年后可以繁殖成多少对兔子?""假设兔子的生殖力是这样的：每一对大兔子每一个月生出一对小兔子，每一对小兔子第二个月也会生出一对，而且不发生死亡。"

据题意可作推算，第一个月里只有一对小兔子；第二个月它们成为一对大兔子，但未生殖；第三个月，这对兔子生了一对小兔子，这时共有两对；第四个月时，只有第一对兔子有生殖力，它们生了一对小兔子，而第二个月出生的兔子只能在下个月才会生殖，所以共有三对兔子；第五个月有两对小兔出生，这个月兔子总数增加到五对，其中三对在下个月有生殖力；第六个月兔子总数增加到八对；……到第十二个月得到兔子的总数是一百四十四对；这样的推算可以无限发展下去.

若不考虑死亡原因，根据上述规律，兔子的总对数按月构成一列数：1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233，…. 读者不难看出，在这列数中，从第三项起，每项都是前两项之和.

而更妙的是，其前项与后项之比的极限恰好等于把单位线段进行黄金分割所得较长的那根线段之长 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

事隔四百多年，数学家奇拉特把上面关于兔子问题抽象成递推关系 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，此后人们便把满足 $F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 的数列以斐波那契命名，称为斐波那契数列（本书为节省叙述篇幅，就用 $\{F_n\}$ 表示斐波那契数列），并且将斐波那契数列的每一项称为斐波那契数.

斐波那契数有许多重要而有趣的性质，从它被提出起的八百年历史中，它始终是许多学者研究的对象，即使在中学生的各种数学竞赛中，也倍受人们青睐. 有关斐波那契数列的数学理论已应用于数论、运筹学和优化理论. 美国数学会从1963年起，还每三个月出版一期《斐波那契季刊》(Fibonacci Quarterly) 专门对这个数列进行研究.

本书试图从数学竞赛培训的角度，对有关斐波那契数列的性质、解题方法等方面，作粗浅的介绍. 每章之末都附有练习题，读者通过这些练习，可以加深理解书中讲述的方法和内容.

第一章 斐波那契数的简单性质

斐波那契数的性质，远比等差数列和等比数列的性质来得丰富，更令人陶醉．这正是斐波那契数列吸引人们的原因之一．然而对于一个数学爱好者来说，不能仅停留在对这些性质的欣赏上面，而应该努力掌握在探索斐波那契数的性质过程中，所采用灵活多样的数学方法，并用以发现其他的新性质．在学习数学过程中，这个想法对于提高解题能力是有所裨益的．下面对斐波那契数的简单性质作些介绍：

性质 1 连续三项斐波那契数 F_{n-1}、F_n、F_{n+1} 相邻两项积的差，是某个斐波那契数的平方，且满足 $F_{n+1}F_n-F_nF_{n-1}=F_n^2$ $(n\geqslant 2, n\in N)$.

斐波那契数列的递推关系 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 是有关计算与证明的常用工具，本性质可用递推关系来证明．

证明 由斐波那契数列的递推关系：

$$F_{n+1}-F_{n-1}=F_n,$$

$$\therefore \quad F_{n+1}F_n-F_nF_{n-1}=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})=F_n^2.$$

性质 2 连续三项斐波那契数 F_{n-1}、F_n、F_{n+1} 满足关系 $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$．即首末两项之积与中间项平方之差的绝对值为 $1(n\geqslant 2, n\in N)$.

数列可以看作与自然数有关的有序变元，因此在证明有关数列的命题时，常常可以考虑用数学归纳法．同样，证明与斐波那契数的有关命题时，也经常要用到数学归纳法．

证明 根据数学归纳法，

(1) 当 $n=2$ 时，$F_3F_1-F_2^2=2-1=(-1)^2$，命题成立。

(2) 设当 $n=k$ 时，有 $F_{k+1}F_{k-1}-F_k^2=(-1)^k$，则当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
F_{k+2}F_k-F_{k+1}^2&=(F_{k+1}+F_k)F_k-F_{k+1}^2\\
&=F_{k+1}F_k-F_{k+1}^2+F_k^2=F_{k+1}(F_k-F_{k+1})+F_k^2\\
&=-F_{k+1}F_{k-1}+F_k^2=(-1)^{k+1}.
\end{aligned}
$$

由 (1)、(2) 可知命题成立.

通过上面性质的证明可以看出，递推法与数学归纳法是证明与斐波那契数有关的命题的两种有用的方法. 请看下面例题，

例 1 已知数列 $\{F_n\}$，$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，数列 $\{A_n\}$ 满足 $\operatorname{ctg}A_n=F_n$，$A_n\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，试证明，$A_n+A_{n+1}=A_{n-1}$（$n$ 为奇数，且 $n\geqslant3$）.

证明 由斐波那契数性质 2，有

$$F_nF_{n+2}-F_{n+1}^2=1 \quad (n\ \text{为奇数}).$$

$$\because\quad F_n+F_{n+1}=F_{n+2},$$

$$\therefore\quad F_n(F_n+F_{n+1})-F_{n+1}^2=1,$$

$$F_nF_{n+1}-1=(F_{n+1}+F_n)(F_{n+1}-F_n),$$

$$\frac{F_nF_{n+1}-1}{F_{n+1}+F_n}=F_{n-1}.$$

由条件 $\dfrac{\operatorname{ctg}A_n\operatorname{ctg}A_{n+1}-1}{\operatorname{ctg}A_{n+1}+\operatorname{ctg}A_n}=\operatorname{ctg}A_{n-1}$，

即 $\operatorname{ctg}(A_n+A_{n+1})=\operatorname{ctg}A_{n-1}$，

$\because\quad 0<A_n+A_{n+1}$，$A_{n-1}<\pi$，

由反正切函数的单调性，得 $A_n+A_{n+1}=A_{n-1}$（n 为奇数，且 $n\geqslant3$）.

例 2 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两根，求证 α、β 与斐波那契数满足关系：

$$\alpha^n=\alpha F_n+F_{n-1} \quad (1)$$

$$\beta^n=\beta F_n+F_{n-1} \quad (2)$$

$$(n\geqslant 2, n\in N).$$

证明 由数学归纳法证明 (1)，同理可证得结论 (2).

(i) 当 $n=2$ 时，由 α 是方程的根，

$\therefore$ $\alpha^2=\alpha+1=\alpha F_2+F_1$ 命题成立.

(ii) 设当 $n=k$ 时，有 $\alpha^k=\alpha F_k+F_{k-1}$.

则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}\alpha^{k+1}&=\alpha\cdot\alpha^k=\alpha(\alpha F_k+F_{k-1})\\&=\alpha^2F_k+\alpha F_{k-1}=(\alpha+1)F_k+\alpha F_{k-1}\\&=\alpha(F_k+F_{k-1})+F_k\\&=\alpha F_{k+1}+F_k.\end{aligned}$$

由 (i)、(ii) 可知命题成立.

从本题的证明，我们还可作如下几点联想：

甲. 上述结论事实上证明了斐波那契数的一个性质，即 $\{\alpha F_n+F_{n-1}\}$、$\{\beta F_n+F_{n-1}\}$ 是公比分别为 α、β 的等比数列. 根据这个想法本题还可以作如下的推广：

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$，它的特征方程 $x^2-px-q=0$ 的两根为 α、β(α、$\beta\neq 0$)，那末数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ 与 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ 都是等比数列.

略证如下：利用递推关系，

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha a_n&=(pa_n+qa_{n-1})-\alpha a_n\\&=(p-\alpha)a_n+qa_{n-1}.\end{aligned}$$

$\because$ $\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=-q$，

$\therefore$ 原式 $=\beta a_n-\alpha\beta a_{n-1}=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$

显见 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ 是公比为 β 的等比数列.

同理可证 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ 是公比为 α 的等比数列.

乙. 从本题的结论 $\alpha^n=\alpha F_n+F_{n-1}$,

$$\beta^n=\beta F_n+F_{n-1}.$$

我们将两式相减,可得 $\alpha^n-\beta^n=(\alpha-\beta)F_n$,

$$\therefore \quad F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}.$$

$F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ 便是应用广泛、著名的比内 (*Binet*) 公式.

其中 α,β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的根,

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

因此比内公式即为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

有时为了证明与计算方便,把公式写成

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n).$$

比内公式是斐波那契数列的通项公式. 它揭示了第 n 项斐波那契数与公比分别为 α、β 的两个等比数列之间的关系,据此便提供了一种用等比数列的有关性质与方法来研究斐波那契数性质及有关计算的途径. 有趣的是,斐波那契数都是自然数,而它的通项却是用无理数形式给出的,利用这一点,我们可以证明某些数是整数的命题.

性质 3 连续二项斐波那契数 F_n、F_{n+1} 的平方和仍是斐波那契数,且满足

$$F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1};$$

并且相间二项斐波那契数 F_{n+1}、F_{n-1} 的平方差仍是斐波那

契数，且满足 $F_{n+1}^2-F_{n-1}^2=F_{2n}$.

可用比内公式来证明此性质．证明时需注意到 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的根，根据韦达定理，$\alpha\beta=-1$，即有 $\alpha^n\beta^n+\alpha^{n+1}\beta^{n+1}=(-1)^n+(-1)^{n+1}=0$.

证明 (1)
$$F_n^2+F_{n+1}^2=\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)\right]^2+\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})\right]^2$$
$$=\frac{1}{5}[\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}+\alpha^{2n+2}-2\alpha^{n+1}\beta^{n+1}+\beta^{2n+2}]$$
$$=\frac{1}{5}[\alpha^{2n}+\beta^{2n}+\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}]$$
$$=\frac{1}{5}[(\alpha-\beta)(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1})+\alpha\beta^{2n+1}+\beta\alpha^{2n+1}+\alpha^{2n}+\beta^{2n}]$$
$$=\frac{1}{5}[\sqrt{5}(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1})-\beta^{2n}-\alpha^{2n}+\alpha^{2n}+\beta^{2n}]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1})=F_{2n+1}$$

∴ 命题成立.

(2)
$$F_{n+1}^2-F_{n-1}^2=\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})\right]^2-\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})\right]^2$$
$$=\frac{1}{5}(\alpha^{2n+2}-2\alpha^{n+1}\beta^{n+1}+\beta^{2n+2}-\alpha^{2n-2}+2\alpha^{n-1}\beta^{n-1}-\beta^{2n-2})$$

$$=\frac{1}{5}(\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}-\alpha^{2n-2}-\beta^{2n-2})$$

$$=\frac{1}{5}[\alpha^{2n}(\alpha^2-\alpha^{-2})+\beta^{2n}(\beta^2-\beta^{-2})]$$

$\because$ $\alpha^{-2}=\beta^2$,

$$\alpha^2-\alpha^{-2}=\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\sqrt{5}.$$

同理 $\beta^2-\beta^{-2}=\beta^2-\alpha^2=-\sqrt{5}$.

$\therefore$ $F_{n+1}^2-F_{n-1}^2=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n}-\beta^{2n})=F_{2n}$.

$\therefore$ 命题成立.

性质 4 斐波那契数满足关系

$$F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}.$$

这是斐波那契数应用比较广泛的一个性质. 显然当 $m=n'$, $n=n'+1$ 时,便有结论 $F_{2n'+1}=F_{n'}^2+F_{n'+1}^2$, 换言之, 性质 3 便是本性质的一个特殊情况.

应该指出的是, 前面几项性质都是连续几项斐波那契数的性质,用递推关系、数学归纳法以及比内公式都可证明, 读者不妨一试,而本性质不是连续几项斐波那契数之间的关系,用递推关系难以奏效,当然本题可用数学归纳法对 m 进行归纳, 然而用比内公式证明也是相当干脆的. 所以在选择问题的证法时,应该考虑其合理性.

证明 $F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$

$$=\frac{1}{5}[(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})(\alpha^m-\beta^m)$$

$$+(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^{m+1}-\beta^{m+1})]$$

$$=\frac{1}{5}[\alpha^{n+m-1}+\beta^{n+m-1}-\alpha^{n-1}\beta^m-\alpha^m\beta^{n-1}+\alpha^{n+m+1}$$

$$+\beta^{n+m+1}-\alpha^n\beta^{m+1}-\alpha^{m+1}\beta^n]$$

$$=\frac{1}{5}[\alpha^{n+m}(\alpha^{-1}+\alpha)+\beta^{n+m}(\beta^{-1}+\beta)$$
$$-\alpha^{n-1}\beta^{m}(1+\alpha\beta)-\alpha^{m}\beta^{n-1}(1+\alpha\beta)]$$

由 $\alpha\beta=-1$，$1+\alpha\beta=0$，及 $\alpha^{-1}+\alpha=-\beta+\alpha=\sqrt{5}$，

$$\beta^{-1}+\beta=-\alpha+\beta=-\sqrt{5}.$$

$$\therefore\quad F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}=\frac{1}{5}[\sqrt{5}\,\alpha^{n+m}-\sqrt{5}\,\beta^{n+m}]$$
$$=F_{n+m}.$$

∴　命题成立.

例 3　试证：　连续三项斐波那契数 F_{n+1}、F_n、F_{n-1}满足关系

$$F_{n+1}^3+F_n^3-F_{n-1}^3=F_{3n}.$$

证明　利用性质 3 和性质 4，得

$$F_{3n}=F_{n+2n}=F_{n-1}F_{2n}+F_nF_{2n+1}$$
$$=F_{n-1}(F_{n+1}^2-F_{n-1}^2)+F_n(F_n^2+F_{n+1}^2)$$
$$=F_{n+1}^2(F_n+F_{n-1})+F_n^3-F_{n-1}^3$$
$$=F_{n+1}^3+F_n^3-F_{n-1}^3.$$

∴　命题成立.

性质 5　连续四项斐波那契数 F_{2n-1}、F_{2n}、F_{2n+1}、F_{2n+2}满足关系

$$F_{2n+2}F_{2n-1}-F_{2n}F_{2n+1}=1.$$

证明　利用比内公式，得

$$F_{2n+2}F_{2n-1}-F_{2n}F_{2n+1}$$
$$=\frac{1}{5}[(\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2})(\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1})$$
$$-(\alpha^{2n}-\beta^{2n})(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1})]$$
$$=\frac{1}{5}(\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}-\alpha^{2n+2}\beta^{2n-1}-\alpha^{2n-1}\beta^{2n+2}-\alpha^{4n+1}$$

$$-\beta^{4n+1}+\alpha^{2n}\beta^{2n+1}+\alpha^{2n+1}\beta^{2n})$$

$$=\frac{1}{5}(\alpha^{2n+1}\beta^{2n}+\alpha^{2n}\beta^{2n+1}-\alpha^{2n+2}\beta^{2n-1}-\alpha^{2n-1}\beta^{2n+2})$$

由于 $\alpha\beta=-1$，$\alpha+\beta=1$ 及 $\alpha^2=\alpha+1$，$\beta^2=\beta+1$，

$$\therefore\quad F_{2n+2}F_{2n-1}-F_{2n}F_{2n+1}$$

$$=\frac{1}{5}[\alpha^{2n}\beta^{2n}(\alpha+\beta)-\alpha^{2n-1}\beta^{2n-1}(\alpha^3+\beta^3)]$$

$$=\frac{1}{5}[\alpha+\beta+\alpha^3+\beta^3]$$

$$=\frac{1}{5}[\alpha+\beta+(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)]$$

$$=\frac{1}{5}[1+\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2]$$

$$=\frac{1}{5}[1+(\alpha+1)+1+(\beta+1)]$$

$$=1.$$

$$\therefore\quad F_{2n+2}F_{2n-1}-F_{2n}F_{2n+1}=1.$$

更一般地，可得 $F_{n+3}F_n-F_{n+2}F_{n+1}=(-1)^{n+1}$.

斐波那契数的性质是千姿百态的，通过所举的例题与若干主要性质可见，在探索斐波那契数的性质时，利用递推关系式、数学归纳法、比内公式及已经证得的若干结论是考虑问题的常见途径．下面我们通过这些常用途径再来处理如下例题．

例 4 试证 $F_{2n+1}^2-F_{2n}F_{2n+1}-F_{2n}^2$ 的值是常数，其中 F_i 是斐波那契数 $(i=1,2,\cdots)$.

证明 利用斐波那契数列的递推关系

$$F_{2n+1}^2-F_{2n}F_{2n+1}-F_{2n}^2$$

$$=F_{2n+1}^2-F_{2n}(F_{2n+1}+F_{2n})$$

$$=F_{2n+1}^2-F_{2n}F_{2n+2}$$

$$=\begin{vmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n+2} & F_{2n+1} \end{vmatrix}.$$

根据行列式的性质：

$$\begin{vmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n+2} & F_{2n+1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n+2}-F_{2n+1} & F_{2n+1}-F_{2n} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} F_{2n} & F_{2n-1} \\ F_{2n+1} & F_{2n} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^2\begin{vmatrix} F_{2n-1} & F_{2n-2} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=(-1)^{2n-1}\begin{vmatrix} F_2 & F_1 \\ F_3 & F_2 \end{vmatrix}=1.$$

∴ $F_{2n+1}^2-F_{2n}F_{2n+1}-F_{2n}^2$ 的值是常数。

本题用类似的方法还可以作如下的推广：

对于数列 $\{a_n\}$，a_1、a_2 是给定的，且满足递推关系：

$$a_{n+2}=Aa_{n+1}-Ba_n,$$

求 $\dfrac{a_{n+1}^2-Aa_na_{n+1}+Ba_n^2}{B^n}$ 的值是常数。

证明 $a_{n+1}^2-Aa_na_{n+1}+Ba_n^2=a_{n+1}^2-a_n(Aa_{n+1}-Ba_n)$

$$=a_{n+1}^2-a_na_{n+2}.$$

∵ $\begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_{n+2} & a_{n+1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n \\ Aa_{n+1}-Ba_n & Aa_n-Ba_{n-1} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n \\ -Ba_n & -Ba_{n-1} \end{vmatrix}=(-B)\begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=B\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n+1} & a_n \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=B^{n-1}\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}.$$

$\therefore\quad a_{n+1}^2-Aa_na_{n+1}+Ba_n^2=C\cdot B^{n-1}$,

其中常数 $C=\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$.

$\therefore\quad \dfrac{a_{n+1}^2-Aa_na_{n+1}+Ba_n^2}{B^n}=\dfrac{C}{B}$，命题成立。

例 5 数列 $\{a_n\}$ 满足关系 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，且

$$\frac{8}{5}<a_1<\frac{9}{5},\quad \left(\frac{8}{5}\right)^2<a_2<\left(\frac{9}{5}\right)^2.$$

试证 (1) $\left(\dfrac{8}{5}\right)^n<a_n<\left(\dfrac{9}{5}\right)^n$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 之和为 A，则 $\dfrac{5}{4}\leqslant A\leqslant\dfrac{5}{3}$.

本题选择数学归纳法证明比较合适.

证明 (1) 当 $n=1$, 2 时，由已知条件可知命题显然成立.

设当 $n=k-1,k$ 时，有

$$\left(\frac{8}{5}\right)^{k-1}<a_{k-1}<\left(\frac{9}{5}\right)^{k-1}$$

$$\left(\frac{8}{5}\right)^{k}<a_{k}<\left(\frac{9}{5}\right)^{k}.$$

将上述不等式相加，得

$$a_{k+1}=a_{k-1}+a_k<\left(\frac{9}{5}\right)^{k-1}+\left(\frac{9}{5}\right)^{k}$$

$$=\left(\frac{9}{5}\right)^{k-1}\left(1+\frac{9}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{9}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{14}{5}<\left(\frac{9}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{81}{25}$$

$$=\left(\frac{9}{5}\right)^{k+1}.$$

$$a_{k+1}=a_{k-1}+a_k>\left(\frac{8}{5}\right)^{k-1}+\left(\frac{8}{5}\right)^{k}$$

$$=\left(\frac{8}{5}\right)^{k-1}\left(1+\frac{8}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{8}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{13}{5}>\left(\frac{8}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{64}{25}$$

$$=\left(\frac{8}{5}\right)^{k+1}.$$

于是 $\left(\frac{8}{5}\right)^{k+1}<a_{k+1}<\left(\frac{9}{5}\right)^{k+1}$ 命题成立。

(2) 由 (1) 证得 $\left(\frac{8}{5}\right)^{n}<a_n<\left(\frac{9}{5}\right)^{n}$,

$\left(\frac{5}{8}\right)^{n}>\frac{1}{a_n}>\left(\frac{5}{9}\right)^{n}$ 取 $n=1,2,\cdots$ 相加,

由无穷递缩等比数列求和公式,得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^{n}=\frac{\frac{5}{9}}{1-\frac{5}{9}}=\frac{5}{4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^{n}=\frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{5}{8}}=\frac{5}{3}.$$

$$\therefore\quad \frac{5}{4}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{5}{3}.$$

例 6 在数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中,从第三项起每一项都等于其前面两项之和,并且 $a_1=1$, $a_2=2$ 以及 $b_1=2$, $b_2=1$. 问有多少个数同时出现在这两个数列之中(第十六届全苏中学生奥林匹克数学竞赛 Ⅷ. 2).

证明 a_n: 1,2,3,5,8,13,21,$\cdots$.

b_n：2，1，3，4，7，11，18，….

经观察数列$\{b_n\}$从第四项起，所有的项满足$a_{n-1}<b_n<a_n$，即$\{b_n\}$中的第四项起的所有项均不会出现在$\{a_n\}$中．现用数学归纳法证明如下：

当$n=4$，5时，显然有$a_3<b_4<a_4$，$a_4<b_5<a_5$，命题成立．

设当$n=k-1$，k时，有

$a_{k-2}<b_{k-1}<a_{k-1}$，$a_{k-1}<b_k<a_k$.

将上述两不等式相加，由递推关系有

$a_k<b_{k+1}<a_{k+1}$，结论成立．

可见只有1，2，3三个数同时出现在$\{a_n\}$、$\{b_n\}$两个数列之中．

例7 设$\{F_n\}$为斐波那契数列$\{1,1,2,3,5,\cdots\}$.

(1) 求出所有的实数对(a, b)，使得对每一个n，aF_n+bF_{n+1}为数列$\{F_n\}$中的项．

(2) 求出所有的正实数对(u,v)，使得对每一个n，$aF_n^2+bF_{n+1}^2$为数列$\{F_n\}$中的项．

（第22届IMO由加拿大提供的预选题）

本题可以作如下考虑：为了求实数对(a,b)，使对一切n，都有aF_n+bF_{n+1}为数列$\{F_n\}$中的项，我们先求出$n=1,2,3$时，使aF_n+bF_{n+1}是数列$\{F_n\}$的项的数对(a,b)，据此再讨论所得的实数对(a,b)是否符合题意．

解 (1) 设实数对(a,b)使对一切自然数n，aF_n+bF_{n+1}是斐波那契数，那末当$n=1,2,3$时，有

$$aF_1+bF_2=a+b=F_k \quad (1)$$

$$aF_2+bF_3=a+2b=F_s \quad (2)$$

$$aF_3+bF_4=2a+3b=F_t \quad (3)$$

(1)+(2) 推得 (3) 式，故 $F_k+F_s=F_l$。先证明下标 k、s、l 只有如下两种可能性：

$$\begin{cases}s=k+1\\l=k+2\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}s=k-1\\l=k+1.\end{cases}$$

∵ 由斐波那契数列递推关系，有

$$F_l=F_{l-1}+F_{l-2},$$

得
$$F_k+F_s=F_{l-1}+F_{l-2}.$$

不妨设 $s>k$，显然有 $l>s$，于是有 $l=k+2$，$l=s+1$. 否则 $l>k+2$，$l>s+1$；即 $l-2>k$，$l-1>s$. 与 $F_k+F_s=F_{l-1}+F_{l-2}$ 矛盾.

∴ $\begin{cases}s=k+1,\\l=k+2.\end{cases}$ 同理 $s<k$ 时，有 $\begin{cases}s=k-1,\\l=k+1.\end{cases}$

(i) 当 $s=k+1$，$l=k+2$ 时，

$$\begin{cases}a+b=F_k,\\a+2b=F_{k+1}.\end{cases}$$

若 $k=1$，则解得 $a=1$，$b=0$.

若 $k=2$，则解得 $a=0$，$b=1$.

若 $k>2$，则将两式相减，得 $b=F_{k-1}$，$a=F_{k-2}$.

当 $(a,\ b)$ 取 $(1,\ 0)$ 或 $(0,\ 1)$ 时，aF_n+bF_{n+1} 显然是 $\{F_n\}$ 中的项.

当 (a,b) 取 $(F_{k-2},F_{k-1})(k>2,k\in N)$ 时，

由性质 4，

$$aF_n+bF_{n+1}=F_{k-2}F_n+F_{k-1}F_{n+1}=F_{k+n-1}.$$

∴ 符合条件的实数对 (a,b) 为 $(0,1)$、$(1,0)$、$(F_{k-2},F_{k-1})(k>2,k\in N)$.

(ii) 当 $s=k-1$，$l=k+1$ 时.

$$\begin{cases}a+b=F_k,\\ a+2b=F_{k-1}.\end{cases}$$

若 $k=2$，则解得 $a=1,b=0$.

若 $k>2$，则将两式相减，得 $b=-F_{k-2}$，$a=F_k+F_{k-2}$.

然而

$$\begin{aligned}aF_n+bF_{n+1}&=(F_k+F_{k-2})F_n-F_{k-2}F_{n+1}\\&=F_kF_n+F_{k-2}(F_n-F_{n+1})\\&=F_kF_n-F_{k-2}F_{n-1}\\&=(F_{k-1}+F_{k-2})F_n-F_{k-2}F_{n-1}\\&=F_{k-1}F_n+F_{k-2}F_{n-2}.\end{aligned}$$

$$\because\quad F_{k-1}F_n+F_{k-2}F_{n-2}<F_{k-1}F_n+F_{k-2}F_{n-1}=F_{k+n-2}.$$

$$F_{k-1}F_n+F_{k-2}F_{n-2}>F_{k-1}F_{n-1}+F_{k-2}F_{n-2}=F_{k+n-3}.$$

即 $\quad F_{k+n-3}<aF_n+bF_{n+1}<F_{k+n-2}$.

故 aF_n+bF_{n+1} 不是斐波那契数，综上所述，满足条件的实数对为 $(0,1)$、$(1,0)$、(F_{k-2},F_{k-1}) $(k>2,k\in N)$.

(2) 求正实数对 (u,v) 使对一切自然数 n，$uF_n^2+vF_{n+1}^2$，是斐波那契数，那末当 $n=1,2,3$ 时，有

$$uF_1^2+vF_2^2=u+v=F_k \tag{4}$$

$$uF_2^2+vF_3^2=u+4v=F_s \tag{5}$$

$$uF_3^2+vF_4^2=4u+9v=F_l \tag{6}$$

显然 $l>s>k\geqslant 1$.

将 (6)×3－(5)×5－(4)×7，得

$$3F_l-5F_s-7F_k=0.$$

当 $l\geqslant s+3$ 时，由斐波那契数列的递推关系，得

$$3F_l-5F_s-7F_k\geqslant 3F_{s+3}-5F_s-7F_k$$

$$=3F_{s+2}+3F_{s+1}-5F_s-7F_k$$
$$=(3F_{s+2}-3F_s)+(2F_{s+1}-2F_s)+F_{s+1}-7F_k$$
$$=3F_{s+1}+2F_{s-1}+F_{s+1}-7F_k$$
$$=4F_{s+1}+2F_{s-1}-7F_k$$
$$=4F_s+6F_{s-1}-7F_k>0.$$

即 $l\geqslant s+3$ 时，不满足 $3F_l-5F_s-7F_k=0$。

又若 $l=s+1$ 时，

$$\begin{aligned}3F_l-5F_s-7F_k&=3F_{s+1}-5F_s-7F_k\\&=3F_{s-1}-2F_s-7F_k\\&=F_{s-1}-2F_{s-2}-7F_k\\&=F_{s-3}-F_{s-2}-7F_k<0.\end{aligned}$$

∴ $l\neq s+1$.

当 $l=s+2$ 时，由斐波那契数列的递推关系，得

$$3F_l-5F_s-7F_k=3F_{s+2}-5F_s-7F_k$$
$$=F_{s-2}+4F_{s-1}-7F_k=5F_{s-2}+4F_{s-3}-7F_k=0.$$

∴ 由 $F_{s-2}+4F_{s-1}=7F_k$，得 $k\leqslant s-2$，

由 $5F_{s-2}+4F_{s-3}=7F_k$，得 $k>s-3$。

于是满足条件的k值为 $k=s-2$.

$5F_k+4F_{k-1}=7F_k$，$4F_{k-1}=2F_k$，即得

$2F_{k-1}=F_k$，$F_{k-1}=F_{k-2}$，由斐波那契数的性质，

$$k-2=1,\ k=3,\ s=5$$

$$\begin{cases}u+v=2\\u+4v=5,\end{cases}\quad 得\quad u=v=1.$$

经检验，根据性质 3，得

$$uF_n^2+vF_{n+1}^2=F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}$$

∴ 满足条件的正实数对为 $(1,1)$.

例 8 一个 990 次幂的多项式 $P(x)$ 满足 $P(k)=F_k$，$k=992, 993, \cdots, 1982$. 其中 $\{F_n\}$ 为斐波那契数列，由下述定义：$F_1=F_2=1$，$F_{n+1}=F_{n-1}+F_n$，$n=2, 3, 4, \cdots$.

试证 $P(1983)=F_{1983}-1$.（第 25 届 IMO 预选题）.

若一个三次幂的多项式函数 $y=Q(x)$，它的图象上有 $[x_i, Q(x_i)]$，$i=1, 2, 3, 4$相异四点，那末多项式函数可以写为

$$Q(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}Q(x_1)$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}Q(x_2)$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}Q(x_3)$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}Q(x_4).$$

显然$Q(x)$是三次幂多项式函数，且$[x_i, Q(x_i)]$ $i=1, 2, 3, 4$四点坐标都满足上式，故 $Q(x)$ 是所求函数. 根据这个设想便可推知 n 次幂的多项式函数 $y=P(x)$，如已知函数图象上 $[x_i, P(x_i)]$ $i=1, 2, \cdots, n+1$，$n+1$ 个相异的点，那末它便可以写成：

$$P(x)$$
$$=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_n)(x_1-x_{n+1})}P(x_1)$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)(x_2-x_{n+1})}P(x_2)$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_4)\cdots(x_3-x_n)(x_3-x_{n+1})}P(x_3)$$
$$+\cdots$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_{n+1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n+1})}$$

$\times P(x_n)+$

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)(x_{n+1}-x_3)\cdots(x_{n+1}-x_{n-1})(x_{n+1}-x_n)}$$

$\times P(x_{n+1})$.

以上便是牛顿插值公式．本题解题途径是由牛顿插值公式先给出满足条件的 990 次幂的多项式函数 $P(x)$，然后再利用斐波那契数的性质证明结论．

证明 令 $P(x)=$

$$\frac{(x-993)(x-994)(x-995)\cdots(x-1981)(x-1982)}{(992-993)(992-994)(992-995)\cdots(992-1981)(992-1982)}F_{992}$$

$$+\frac{(x-992)(x-994)(x-995)\cdots(x-1981)(x-1982)}{(993-992)(993-994)(993-995)\cdots(993-1981)(993-1982)}F_{993}$$

$$+\frac{(x-992)(x-993)(x-995)\cdots(x-1981)(x-1982)}{(994-992)(994-993)(994-995)\cdots(994-1981)(994-1982)}F_{994}$$

$+\cdots$

$$+\frac{(x-992)(x-993)(x-994)\cdots(x-1980)(x-1982)}{(1981-992)(1981-993)(1981-994)\cdots(1981-1980)(1981-1982)}F_{1981}$$

$$+\frac{(x-992)(x-993)(x-994)\cdots(x-1980)(x-1981)}{(1982-992)(1982-993)(1982-994)\cdots(1982-1980)(1982-1981)}F_{1982}.$$

$$P(1983)=\frac{990\cdot989\cdot988\cdots2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdots989\cdot990}F_{992}$$

$$-\frac{991\cdot989\cdot988\cdots2\cdot1}{1\cdot1\cdot2\cdot3\cdots988\cdot989}F_{993}$$

$$+\frac{991\cdot 990\cdot 988\cdots 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdots 987\cdot 988}F_{994}$$

$$-\frac{991\cdot 990\cdot 989\cdot 987\cdots 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdots 986\cdot 987}F_{995}$$

$$+\cdots$$

$$-\frac{991\cdot 990\cdot 989\cdots 3\cdot 1}{989\cdot 988\cdot 987\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1}F_{1981}$$

$$+\frac{991\cdot 990\cdot 989\cdots 3\cdot 2}{990\cdot 989\cdot 988\cdots 2\cdot 1}F_{1982}$$

$$=\sum_{i=0}^{991}(-1)^i C_{991}^i F_{992+i}+F_{1983}.$$

由比内公式　$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$，得

$$P(1983)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{991}(-1)^i C_{991}^i \alpha^{992+i}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{991}(-1)^i C_{991}^i \beta^{992+i}+F_{1983}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{992}\sum_{i=0}^{991}(-1)^i C_{991}^i \alpha^i$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\beta^{992}\sum_{i=0}^{991}(-1)^i C_{991}^i \beta^i+F_{1983}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{992}(1-\alpha)^{991}-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^{992}(1-\beta)^{991}$$

$$+F_{1983}$$

$\because$　$1-\alpha=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\beta$，$1-\beta=1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\alpha$.

及 $\alpha\beta=-1$.

$\therefore$　$P(1983)=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{992}\cdot\beta^{991}$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^{992}\alpha^{991}+F_{1983}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha+\frac{1}{\sqrt{5}}\beta+F_{1983}=F_{1983}-1.$$

$\therefore\quad P(1983)=F_{1983}-1.$

在探求斐波那契数的简单性质时，我们所用到的数学工具都是大家所熟悉的，如数学归纳法、用斐波那契数列的递推关系进行式的恒等变换、用比内公式将问题转化为等比数列的问题以及利用已经获得的性质来证明新的性质等．这些性质的证明一般来说是比较轻松的．

例题6、7、8都是国际中学生数学竞赛的试题，这些试题都有一定难度，有的甚至百思难得一解，这个情景在我们学习数学的生涯中经常遇到．那末一个好的念头或解题灵感怎么会出现的呢？在著名美籍匈牙利数学家波利亚(George Po'lya, 1887～1985)的名著《怎样解题》一书中，曾奉献给我们一些数学解题经验．在“怎样解题”表中，他指出如果你解题时遇到困难，就考虑“你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？”“你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？”回顾例题6、7、8的解题途径，会发现与波利亚的说法非常吻合．证明斐波那契数的解题方法常可由此类解题途径获得启迪．

此外，前面一些性质与例题，我们仅给出一种解法，然而研究斐波那契数的方法还是比较多的，例如在例题中用数学归纳法证得的结论，读者还可以尝试用比内公式去求得另一证明．

练 习 一

1. 斐波那契数列为：$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$，

   试证 $F_{k+3}F_{k-2}-F_{k-1}F_{k+2}=3\cdot(-1)^{k-1}$.

2. α，β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根，$F_n(n=1,2,\cdots)$ 为斐波那契数.

   试证 $\{F_n-\alpha F_{n-1}\}$ 与 $\{F_n-\beta F_{n-1}\}$为等比数列.

3. 数列 $\{a_n\}$：$a_1=1$，$a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}$，

   试证 $a_n=\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

4. 用数学归纳法证明性质 4、性质 5.

5. 用比内公式证明性质 2.

6. 试证斐波那契数满足关系式

   $$F_n=\left[\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right]+\frac{1-(-1)^n}{2}.\quad 其中\ \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

   $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

7. 已知：$L_1=1, L_2=3, L_{n+2}=L_n+L_{n+1}$

   （鲁卡斯数列）.

   求证 (i) $L_n=\alpha^n+\beta^n$, $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

   (ii) $L_n=[\alpha^n]+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

8. 试证 $F_{m+n}^2-F_{m-n}^2=F_{2m}\cdot F_{2n}\quad(m>n)$,

   其中 F_k 是斐波那契数.

9. 试证 $F_{k-1}F_m-F_kF_{m-1}=(-1)^kF_{m-k}(m>k)$,

   其中 F_k 是斐波那契数.

10. 试证 $F_n^2-2F_{n+1}^2-2F_{n+2}^2+F_{n+3}^2=0$,

    其中 F_k 是斐波那契数.

第二章　斐波那契数列通项

在第一章，我们曾经利用斐波那契数列的性质：

$$\alpha^n=F_n\alpha+F_{n-1}、\ \beta^n=F_n\beta+F_{n-1}$$

得到表示它通项的比内公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n).$$

不言而喻，有了通项公式，在解决有关斐波那契数的问题时，要方便得多了.

应该注意到，斐波那契数列的递推关系式是一种特殊的二阶线性递推关系式，接下来考虑的是，对于递推关系式为$a_{n+2}=Aa_{n+1}+Ba_n$这样一般的二阶线性递推关系式如何求它的通项呢？对于$a_{n+k}=Aa_{n+k-1}+Ba_{n+k-2}+\cdots+Pa_n$这样的$k$阶线性递推关系式如何求通项呢？再如果递推关系式是由分式形式甚至根式形式给出的数列，需要求出它的通项公式，应该怎样想办法呢？我们现在就来考察这些问题.

§2.1　用特征方程的方法求通项

求$a_{n+k}=Aa_{n+k-1}+Ba_{n+k-2}+\cdots+Pa_n$这类$k$阶线性递推关系式给出的数列通项，一般常用特征方程的方法. 如已知a_1、a_2、a_3及$a_{n+3}=Aa_{n+2}+Ba_{n+1}+Ca_n$，由比内公式的启示，考虑是否存在$x$，使$a_n=x^n$满足递推关系式.

设$x\neq0$，将$a_n=x^n$代入递推关系式，得

$$x^{n+3}=Ax^{n+2}+Bx^{n+1}+Cx^n \tag{1}$$

两边除以 x^n，整理得

$$x^3-Ax^2-Bx-C=0 \tag{2}$$

我们把方程 (2) 称为递推关系式 (1) 的特征方程，一般 k 阶线性递推关系式 $a_{n+k}=Aa_{n+k-1}+Ba_{n+k-2}+\cdots+Pa_n$ 的特征方程为 $x^k-Ax^{k-1}-Bx^{k-2}-\cdots-P=0$.

显然，满足方程(2)的根 x_1，必满足递推关系式 (1)，即有 $x_1^{n+3}=Ax_1^{n+2}+Bx_1^{n+1}+Cx_1^n$. 这样我们就证明了 x 是存在的.

若特征方程 (2) 有三个相异的实根 x_1、x_2、x_3，则

$$a_n=C_1x_1^n+C_2x_2^n+C_3x_3^n \tag{3}$$

亦满足递推关系式(其中 C_1、C_2、C_3 是任意常数).

因为 x_1、x_2、x_3 是方程 (2) 的根，所以有

$$x_1^3-Ax_1^2-Bx_1-C=0,$$
$$x_1^{n+3}=Ax_1^{n+2}+Bx_1^{n+1}+Cx_1^n;$$
$$x_2^3-Ax_2^2-Bx_2-C=0,$$
$$x_2^{n+3}=Ax_2^{n+2}+Bx_2^{n+1}+Cx_2^n;$$
$$x_3^3-Ax_3^2-Bx_3-C=0,$$
$$x_3^{n+3}=Ax_3^{n+2}+Bx_3^{n+1}+Cx_3^n.$$

而将 (3) 式代入

$$\begin{aligned}Aa_{n+2}+Ba_{n+1}+Ca_n&=A[C_1x_1^{n+2}+C_2x_2^{n+2}+C_3x_3^{n+2}]\\&\quad+B[C_1x_1^{n+1}+C_2x_2^{n+1}+C_3x_3^{n+1}]\\&\quad+C[C_1x_1^n+C_2x_2^n+C_3x_3^n]\\&=C_1[Ax_1^{n+2}+Bx_1^{n+1}+Cx_1^n]\\&\quad+C_2[Ax_2^{n+2}+Bx_2^{n+1}+Cx_2^n]\\&\quad+C_3[Ax_3^{n+2}+Bx_3^{n+1}+Cx_3^n]\\&=C_1x_1^{n+3}+C_2x_2^{n+3}+C_3x_3^{n+3}=a_{n+3}.\end{aligned}$$

故 (3) 式满足递推关系式.

当 $\{a_n\}$ 除了给出递推关系式外，还给出初始条件 a_1、a_2、

a_3 时，对 (3) 式取 $n=1,2,3$ 时得方程组

$$\begin{cases}C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3=a_1,\\ C_1x_1^2+C_2x_2^2+C_3x_3^2=a_2,\\ C_1x_1^3+C_2x_2^3+C_3x_3^3=a_3.\end{cases}$$

解出 C_1、C_2、C_3 的值，就可以求出 $a_n=C_1x_1^n+C_2x_2^n+C_3x_3^n$，这时的通项公式既满足递推关系式，又符合初始条件，因此它是数列的通项公式.

可以证明，若 x_1 为方程 (2) 的两重根或三重根时，则有

$$\begin{cases}f(x_1)=x_1^3-Ax_1^2-Bx_1-C=0,\\ f'(x_1)=3x_1^2-2Ax_1-B=0.\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}f(x_1)=x_1^3-Ax_1^2-Bx_1-C=0,\\ f'(x_1)=3x_1^2-2Ax_1-B=0,\\ f''(x_1)=3\cdot 2x_1-2A=0.\end{cases}$$

因此，除有 x_1^n 满足递推关系式外，还有 nx_1^n、$n(n-1)x_1^n$ 亦满足递推关系式。从而特征方程有二重根或三重根时，有

$$a_n=C_1x_1^n+C_2nx_1^n+C_3x_2^n$$

或

$$a_n=C_1x_1^n+C_2nx_1^n+C_3n(n-1)x_1^n.$$

用初始条件亦能用解方程组的方法确定 C_1、C_2、C_3，即得满足初始条件 a_1、a_2、a_3 及递推关系式 $a_{n+3}=Aa_{n+2}+Ba_{n+1}+Ca_n$ 的数列的通项公式。一般称 x_1^n、x_2^n、x_3^n 为特征方程的解，称 (3) 式为满足递推关系式的通解．把由初始条件确定通解 $a_n=C_1x_1^n+C_2x_2^n+C_3x_3^n$ 的系数 C_1、C_2、C_3后，所得的代数式称为特解．这就是通常所称的求递推数列通项的特征方程方法．有了这种方法，就能求出由线性递推关系式给出的数列的通项.

例 1　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$，$a_3=2$，$3a_{n+3}=4a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n$．求通项公式 a_n.

解 由特征方程 $3x^3-4x^2-x+2=0$，解得

$x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=-\frac{2}{3}$，所以通解为

$a_n=C_1x_1^n+C_2nx_2^n+C_3x_3^n$，$a_n=C_1+C_2n+C_3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

从而将 $a_1=1, a_2=1, a_3=2$ 代入通解

$$\begin{cases} C_1+C_2-\frac{2}{3}C_3=1, \\ C_1+2C_2+\frac{4}{9}C_3=1, \\ C_1+3C_2-\frac{8}{27}C_3=2. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1=\frac{1}{25}, \\ C_2=\frac{3}{5}, \\ C_3=-\frac{27}{50}. \end{cases}$$

所以 $a_n=\frac{1}{25}\left[1+15n-\frac{27}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$,

$$a_n=\frac{1}{25}\left[1+15n+9\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right].$$

例 2 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=0$, 求通项公式.

解 特征方程 $x^2+x+1=0$ 的根为

$$x_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3},$$

所以通解为 $a_n=C_1x_1^n+C_2x_2^n$，

$$a_n=C_1\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)+C_2\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-i\sin\frac{2n\pi}{3}\right).$$

为将通解写成实数形式，由于 C_1、C_2 是任意常数，不妨取 $C_1=\frac{1}{2}$，$C_2=\frac{1}{2}$，得 $a_n=\cos\frac{2n\pi}{3}$ 是满足递推关系的解. 再取 $C_1=\frac{1}{2i}$，$C_2=-\frac{1}{2i}$，由通解得 $a_n=\sin\frac{2n\pi}{3}$ 也是满足递推关系的特解，于是通解可以改写为：

$$a_n=C_1\cos\frac{2n\pi}{3}+C_2\sin\frac{2n\pi}{3}$$

这种实数形式，将 $a_1=1$，$a_2=2$ 代入通解

$$\begin{cases}C_1\cos\frac{2\pi}{3}+C_2\sin\frac{2\pi}{3}=1,\\ C_1\cos\frac{4\pi}{3}+C_2\sin\frac{4\pi}{3}=2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\frac{C_1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2=1,\\ -\frac{C_1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}C_2=2.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}C_1=-3,\\ C_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

所以 $a_n=-3\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}$.

一般地说，特征根为虚数时，$x_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$x_2=$

$r(\cos\theta - i\sin\theta)$. 取 $u_n=\frac{1}{2}(x_1^n+x_2^n)$, $v_n=\frac{1}{2i}(x_1^n-x_2^n)$ 亦满足递推关系式. 而$u_n=r^n\cos n\theta$, $v_n=r^n\sin n\theta$, 于是通解便可以表示为实数形式 $a_n=C_1r^n\cos n\theta+C_2r^n\sin n\theta$. 有了求通解的一般方法, 可以解决一些与通解有关的递推数列的问题.

例 3 设 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 为如下定义的两个整数列

$$x_1=1,\ x_2=1,\ x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n,$$

$$y_1=1,\ y_2=7,\ y_{n+2}=2y_{n+1}+3y_n.$$

即: $\{x_n\}$: 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, …;

$\{y_n\}$: 1, 7, 17, 55, 161, 487, ….

试证 除去 1 以外, 不存在任何同时出现在两个数列中的数.

证明 $\{x_n\}$ 的特征方程为 $x^2-x-2=0$, 方程的根为

$$x_1=2,\ x_2=-1.$$

∴ 数列 $\{x_n\}$ 的通解为 $x_n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot(-1)^n$. 由初始条件 $x_1=1, x_2=1$, 解方程组

$$\begin{cases}2C_1-C_2=1,\\4C_1+C_2=1.\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}C_1=\frac{1}{3},\\C_2=-\frac{1}{3}.\end{cases}$$

∴ $\{x_n\}$ 的通项公式为 $x_n=\frac{1}{3}[2^n+(-1)^{n-1}]$.

$\{y_n\}$ 的特征方程为 $y^2-2y-3=0$.

方程的根为 $y_1=3, y_2=-1$.

∴ 数列 $\{y_n\}$ 通解为 $y_n=C_1\cdot 3^n+C_2\cdot(-1)^n$.

由初始条件 $y_1=1, y_2=7$, 解方程组

$$\begin{cases}3C_1-C_2=1,\\9C_1+C_2=7.\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}C_1=\dfrac{2}{3},\\C_2=1.\end{cases}$$

∴ $\{y_n\}$ 的通项公式为 $y_n=\dfrac{2}{3}\cdot 3^n+(-1)^n$.

现在证明不存在同时出现在两个数列中的数．用反证法，设 $x_n=y_m$.

则有 $2^n-2\cdot 3^m=(-1)^n+3\cdot(-1)^m$.

(1) 若 n 为奇数、m 为奇数．

$$2^{n-1}-3^m=\frac{1}{2}[(-1)^n+3(-1)^m]=-2.$$

等式右边是偶数，仅当 $n=1, m=1$ 时，才成立．

(2) 若 n 为奇数、m 为偶数．

$$2^{n-1}-3^m=\frac{1}{2}[(-1)^n+3(-1)^m]=1,$$

$$2^{n-1}=3^m+1=(4-1)^m+1=4Q+2=2(2Q+1), Q\in N.$$

$$2^{n-2}=2Q+1.$$

左右两边奇偶性不同，矛盾．

(3) 若 n 为偶数，m 为偶数．

$$2^{n-1}-3^m=\frac{1}{2}[(-1)^n+3\cdot(-1)^m]=2.$$

左右两边奇偶性不同，矛盾．

(4) 若 n 为偶数，m 为奇数

$$2^{n-1}-3^m=\frac{1}{2}[(-1)^n+3\cdot(-1)^m]=-1.$$

$$2^{n-1}=3^m-1=(4-1)^m-1=4R-2=2(2R-1), R\in N.$$

与 (2) 同理仅当 $n=2, m=1$ 时成立．综上所述，扣除第一项

外，x_n 除第二项外，不存在同时出现于两个数列中的数。

§2.2 用变换的方法求通项

等差数列、等比数列是大家比较熟悉的数列。通过变换的方法，把递推数列转化为等差数列或等比数列，然后来解题这是求递推数列通项的一种常用方法．尤其是非线性的递推数列，经常需要考虑这种方法．下面请看用这个方法来求斐波那契数列的通项，并试图探索用变换方法求通项公式的实质：

$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，设想两边加上 KF_{n-1}，得

$$F_n+KF_{n-1}=(1+K)F_{n-1}+F_{n-2},$$

$$F_n+KF_{n-1}=(1+K)\left[F_{n-1}+\frac{1}{1+K}F_{n-2}\right].$$

如果能存在常数 K，使得

$$K=\frac{1}{1+K}.$$

问题就能转化为 $F_n+KF_{n-1}=(1+K)[F_{n-1}+KF_{n-2}]$，

令 $u_n=F_n+KF_{n-1}$，

便得到 $u_n=(1+K)u_{n-1}$，

显然 $\{u_n\}$ 是等比数列，这样问题就易于解决了．而常数 K 能通过解方程 $K=\frac{1}{1+K}$ 求得．故一般先通过待定系数法，求出 K；然后通过变换把递推数列转化为等比数列或等差数列．转化是数学解题的基本思想，变换的方法实质就是转化．由解方程，我们取

$$K=-\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

令 $$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

它们是 $x^2-x-1=0$ 的两根. 由 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ 得

$$F_n-\alpha F_{n-1}=(1-\alpha)F_{n-1}+F_{n-2}=\beta F_{n-1}+F_{n-2},$$

$$F_n-\alpha F_{n-1}=\beta\left(F_{n-1}+\frac{1}{\beta}F_{n-2}\right)=\beta(F_{n-1}-\alpha F_{n-2}),$$

令 $u_n=F_n-\alpha F_{n-1}$, 得

$u_n=\beta u_{n-1}$, $\{u_n\}$ 是等比数列. $\therefore\quad u_n=\beta^{n-2}u_2$, 其中

$u_2=F_2-\alpha F_1=1-\alpha=\beta$. $\qquad\therefore\quad u_n=\beta^{n-1}$.

$$F_n-\alpha F_{n-1}=\beta^{n-1},$$

$$\alpha F_{n-1}-\alpha^2F_{n-2}=\beta^{n-2}\alpha,$$

$$\alpha^2F_{n-2}-\alpha^3F_{n-3}=\beta^{n-3}\alpha^2,$$

……

$$\alpha^{n-2}F_2-\alpha^{n-1}F_1=\beta^1\alpha^{n-2}.$$

把上面 $(n-1)$ 个等式相加, 得

$$F_n-\alpha^{n-1}=\beta^{n-1}+\beta^{n-2}\alpha+\cdots+\beta^1\alpha^{n-2},$$

$$F_n=\beta^{n-1}+\beta^{n-2}\alpha+\cdots+\beta^1\alpha^{n-2}+\alpha^{n-1}.$$

等式右边是公比为 $\frac{\alpha}{\beta}$ 的等比数列, 求和得

$$F_n=\frac{\beta^{n-1}\left[1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\right]}{1-\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{1}{\beta-\alpha}[\beta^n-\alpha^n],$$

即 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$. 这就是用变换的方法求得斐波那契数列的通项公式

例 4 已知 $\{a_n\}$ $a_1=P$, $a_{n+1}=Aa_n+B(A\neq0)$.

求 数列 $\{a_n\}$ 的通项。

解 (1) 若 $A=1$ 即是等差数列,其通项即为

$$a_n=P+(n-1)B.$$

(2) 若 $A\neq1$ 用变换的方法,在递推关系式两边加上K,得

$$a_{n+1}+K=Aa_n+B+K=A\left(a_n+\frac{B+K}{A}\right).$$

令
$$K=\frac{B+K}{A},$$

解得
$$K=\frac{B}{A-1}.$$

于是 $a_{n+1}+K=A(a_n+K)$.

设 $b_n=a_n+K$, b_n 就是等比数列 $b_n=b_1\cdot A^{n-1}$. 即

$$a_n=(a_1+K)\cdot A^{n-1}-K,$$

∴ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为:

$$a_n=\begin{cases}P+(n-1)B & A=1,\\ \left(P+\dfrac{B}{A-1}\right)A^{n-1}-\dfrac{B}{A-1} & A\neq1.\end{cases}$$

例 5 已知数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots$ 满足关系式$(7-a_{n+1})\cdot(2+a_n)=18$, $n=0,1,2,\cdots$ 且 $a_0=7$.

求 $\dfrac{1}{a_0-4}+\dfrac{1}{a_1-4}+\cdots+\dfrac{1}{a_n-4}$ 的值.

解 令 $b_n=\dfrac{1}{a_n-4}$, 则变换关系式,得

$$\left(3-\frac{1}{b_{n+1}}\right)\left(6+\frac{1}{b_n}\right)=18,$$

$$(3b_{n+1}-1)(6b_n+1)=18b_nb_{n+1},$$

整理得
$$3b_{n+1}-6b_n-1=0,$$

$$b_{n+1}=2b_n+\frac{1}{3},$$

由例 4 结论可得

$$b_n=\frac{1}{3}(2^{n+1}-1),\quad n=0,1,2,\cdots.$$

$$\therefore\quad b_0+b_1+\cdots+b_n=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(2^{k+1}-1)$$

$$=\frac{1}{3}(2^{n+2}-n-3).$$

即 $$\frac{1}{a_0-4}+\frac{1}{a_1-4}+\cdots+\frac{1}{a_n-4}=\frac{1}{3}(2^{n+2}-n-3),$$

$n=0,1,2,\cdots.$

例 6 数列 $\{f_n\}$ 定义如下：$f_0=1$，$f_1=C$，C 为正整数，满足 $f_n=2f_{n-1}-f_{n-2}+2(n\geqslant 2)$，

试证 $f_kf_{k+1}=f_h$，$f_h\in\{f_n\}$．（英国 1985 年数学竞赛试题）．

证明 由原递推关系变换，得

$$f_n-f_{n-1}=f_{n-1}-f_{n-2}+2,$$

令 $b_n=f_n-f_{n-1}$，得

$b_n=b_{n-1}+2$，即 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，

$$b_n=b_1+2(n-1),\quad b_1=C-1.$$

$$\therefore\quad f_n-f_{n-1}=C-1+2(n-1).$$

令 $n=1,2,\cdots,n$ 各式相加

$$f_n-f_0=n(C-1)+2[1+2+\cdots+(n-1)]$$

得通项为：$f_n=nC+(n-1)^2$.

于是 $$f_kf_{k+1}=[kC+(k-1)^2][(k+1)C+k^2].$$

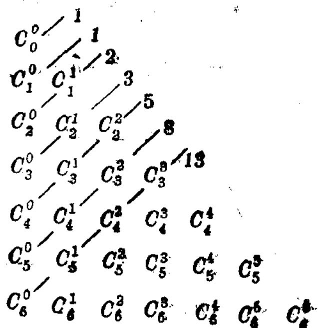
经变换 $$[kC+(k-1)^2][(k+1)C+k^2]$$

$$=[kC+k(k-1)+1]C+[kC+k(k-1)]^2=f_h$$

其中 $h=kC+k(k-1)+1$，故命题成立

§2.3　斐波那契数与组合数

观察图中杨辉三角形所画的斜线，就会发觉斐波那契数与组合组之间有着内在的联系．



杨辉三角形

$C_0^0=1,$

$C_1^0=1,$

$C_2^0+C_1^1=1+1=2,$

$C_3^0+C_2^1=1+2=3,$

$C_4^0+C_3^1+C_2^2=1+3+1=5,$

$C_5^0+C_4^1+C_3^2=1+4+3=8,$

$C_6^0+C_5^1+C_4^2+C_3^3=1+5+6+1=13.$

……

如果把斜线上的组合数相加，等号右边的数就是斐波那契数，把规律概括出来就应该是如下关系式

$$F_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i},$$

$\left[\frac{n-1}{2}\right]$表示不超过$\frac{n-1}{2}$的最大整数.

现用数学归纳法证明结论.

当$n=1$时, $\sum_{i=0}^{0} C_{1-i-1}^{i}=C_0^0=F_1$,

$n=2$时, $\sum_{i=0}^{\left[\frac{2-1}{2}\right]} C_{2-i-1}^{i}=C_1^0=F_2$,

命题成立.

假定命题对n时成立,即

$$F_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i}.$$

要证明

$$F_{n+1}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-i}^{i}$$

时亦成立,分两种情况讨论:

(i) $n=2m$时

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-i}^{i} &= \sum_{i=0}^{m} C_{2m-i}^{i}=1+\sum_{i=1}^{m} C_{2m-i}^{i} \\
&=1+\sum_{i=1}^{m}\left(C_{2m-i-1}^{i}+C_{2m-i-1}^{i-1}\right) \\
&=\left(1+\sum_{i=1}^{m} C_{2m-i-1}^{i}\right)+\sum_{i=1}^{m} C_{2m-i-1}^{i-1} \\
&=\left(1+\sum_{i=1}^{m-1} C_{2m-i-1}^{i}\right)+C_{2m-m-1}^{m}+\sum_{i=0}^{m-1} C_{2m-i-2}^{i} \\
&=\sum_{i=0}^{m-1} C_{2m-i-1}^{i}+\sum_{i=0}^{m-1} C_{2m-i-2}^{i}=F_{2m}+F_{2m-1} \\
&=F_{2m+1}.
\end{aligned}$$

(其中规定 $C_{2m-m-1}^{m}=C_{m-1}^{m}=0$),

即 $n=2m$ 时，满足 $F_n+F_{n-1}=F_{n+1}$.

(ii) $n=2m+1$ 时

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-i}^{i}=\sum_{i=0}^{m} C_{2m+1-i}^{i}=1+\sum_{i=1}^{m} C_{2m+1-i}^{i}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{m}\left(C_{2m-i}^{i}+C_{2m-i}^{i-1}\right)$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{m} C_{2m-i}^{i}\right)+\sum_{i=1}^{m} C_{2m-i}^{i-1}$$

$$=\sum_{i=0}^{m} C_{2m-i}^{i}+\sum_{i=0}^{m-1} C_{2m-i-1}^{i}$$

$$=F_{2m+1}+F_{2m}=F_{2m+2}.$$

即 $n=2m+1$ 时，满足

$$F_n+F_{n-1}=F_{n+1}.$$

由上可知

$$F_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i}.$$

$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，则有

$$F_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i},$$

现在我们进一步考虑由一般二阶线性递推关系式 $a_1=a, a_2=b, a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n(q\neq 0)$ 给出的数列与组合数之间的关系．为了方便先考虑稍特殊些的情况：

例 7 数列 $\{a_n\}$：$a_1=1, a_2=p$,

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n(pq\neq 0),$$

试证

$$a_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i} p^{n-2i-1} q^{i}.$$

证明 由数学归纳法，

当 $n=1$ 时，$\sum_{i=0}^{0} C_{1-i-1}^{i} p^{1-2i-1} q^{i}=1$，

$n=2$ 时，$\sum_{i=0}^{0} C_{2-i-1}^{i} p^{2-2i-1} q^{i}=p$.

等式在 $n=1,2$ 时成立.

假定命题对 $n, n-1$ 时成立，即

$$a_{n-1}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_{n-i-2}^{i} p^{n-2i-2} q^{i},$$

$$a_{n}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i} p^{n-2i-1} q^{i}.$$

要证明

$$a_{n+1}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-i}^{i} p^{n-2i} q^{i}$$

亦成立.

$$\begin{aligned}pa_{n}+qa_{n-1}=&p\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i} p^{n-2i-1} q^{i}\\&+q\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_{n-i-2}^{i} p^{n-2i-2} q^{i}\\=&\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i} p^{n-2i} q^{i}\\&+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_{n-i-2}^{i} p^{n-2i-2} q^{i+1}.\end{aligned}$$

下面分两种情况讨论：

（1） $n=2m$ 时，

$$pa_{n}+qa_{n-1}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i} p^{n-2i} q^{i}$$

$$+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_{n-i-2}^{i}\, p^{n-2i-2}\, q^{i+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{m-1} C_{2m-i-1}^{i}\, p^{2m-2i}\, q^{i}+\sum_{i=0}^{m-1} C_{2m-i-2}^{i}\, p^{2m-2i-2}\, q^{i+1}$$

$$=p^{2m}+\sum_{i=1}^{m-1} C_{2m-i-1}^{i}\, p^{2m-2i}\, q^{i}+\sum_{i=1}^{m} C_{2m-i-1}^{i-1}\, p^{2m-2i}\, q^{i}$$

$$=p^{2m}+\sum_{i=1}^{m-1} C_{2m-i-1}^{i}\, p^{2m-2i}\, q^{i}+\sum_{i=1}^{m-1} C_{2m-i-1}^{i-1}\, p^{2m-2i}\, q^{i}+q^{m}$$

$$=p^{2m}+\sum_{i=1}^{m-1}\left(C_{2m-i-1}^{i}+C_{2m-i-1}^{i-1}\right) p^{2m-i}\, q^{i}+q^{m}$$

$$=p^{2m}+\sum_{i=1}^{m-1} C_{2m-i}^{i}\, p^{2m-i}\, q^{i}+q^{m}=\sum_{i=0}^{m} C_{2m-i}^{i}\, p^{2m-i}\, q^{i}$$

$$=a_{2m+1}=a_{n+1}.$$

即 n 为偶数时命题成立。

(2) $n=2m+1$ 时，

$$pa_{n}+qa_{n-1}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i}\, p^{n-2i}\, q^{i}$$

$$+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_{n-i-2}^{i}\, p^{n-2i-2} q^{i+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{m} C_{2m-i}^{i}\, p^{2m-2i+1}\, q^{i}$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1} C_{2m-i-1}^{i}\, p^{2m-2i-1} q^{i+1}$$

$$=p^{2m}+\sum_{i=1}^{m} C_{2m-i}^{i}\, p^{2m-2i+1}\, q^{i}$$

$$+\sum_{i=1}^{m} C_{2m-i}^{i-1}\, p^{2m-2i+1}\, q^{i}$$

$$=p^{2m}+\sum_{i=1}^{m}\left(C_{2m-i}^{i}+C_{2m-i}^{i-1}\right) p^{2m-2i+1}\, q^{i}$$

$$=p^{2m}+\sum_{i=1}^{m}C_{2m-i+1}^{i}\,p^{2m-2i+1}q^{i}$$

$$=\sum_{i=0}^{m}C_{2m-i+1}^{i}\,p^{2m-2i+1}q^{i}$$

$$=a_{2m+2}=a_{n+1},$$

即 n 为奇数时命题成立.

综上所述 $a_1=1$, $a_2=p$, $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n(pq\neq 0)$时，有

$$a_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-i-1}^{i}\,p^{n-2i-1}q^{i}.$$

最后对一般的二阶线性递推数列 $a_1=a$, $a_2=b$, $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n(pq\neq 0)$ 与组合数之间也有如下关系.

例 8 数列 $\{a_n\}$: $a_1=a$, $a_2=b$, $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n(pq\neq 0)$,

试证

$$a_n=A\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{n-i}^{i}\,p^{n-2i}q^{i}+B\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-i-1}^{i}\,p^{n-2i-1}q^{i},$$

其中 $A=-\dfrac{1}{q}\begin{vmatrix}a & b\\ 1 & p\end{vmatrix}$, $B=\dfrac{1}{q}\begin{vmatrix}a & b\\ p & (p^2+q)\end{vmatrix}$.

证明 由数学归纳法，

当 $n=1$ 时，

$$A\sum_{i=0}^{0}C_{1-i}^{i}\,p^{1-2i}q^{i}+B\sum_{i=0}^{0}C_{1-i-1}^{i}\,p^{1-2i-1}q^{i}$$

$$=-\frac{1}{q}(ap-b)p+\frac{1}{q}(ap^2+aq-bp)=a=a_1,$$

当 $n=2$ 时，

$$A\sum_{i=0}^{1}C_{2-i}^{i}\,p^{2-2i}q^{i}+B\sum_{i=0}^{0}C_{2-i-1}^{i}\,p^{2-2i-1}q^{i}$$

$$=-\frac{1}{q}(ap-b)(p^2+q)+\frac{1}{q}(ap^2+aq-bp)p$$
$$=b.$$

等式在 $n=1,2$ 时成立.

假定命题对 $n, n-1$ 时成立, 即

$$a_{n-1}=A\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i}\, p^{n-2i-1} q^{i}$$
$$+B\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_{n-i-2}^{i}\, p^{n-2i-2} q^{i},$$

$$a_{n}=A\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-i}^{i}\, p^{n-2i} q^{i}$$
$$+B\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i}\, p^{n-2i-1} q^{i}.$$

要证明

$$a_{n+1}=A\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_{n-i+1}^{i}\, p^{n-2i+1} q^{i}$$
$$+B\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-i}^{i}\, p^{n-2i} q^{i}$$

亦成立.

$$pa_n+qa_{n-1}=p\Bigg(A\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-i}^{i}\, p^{n-2i} q^{i}$$
$$+B\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i}\, p^{n-2i-1} q^{i}\Bigg)$$
$$+q\Bigg(A\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i}\, p^{n-2i-1} q^{i}$$

$$+B\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_{n-i-2}^{i} p^{n-2i-2} q^{i}\Big)$$

$$=A\Big(p\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-i}^{i} p^{n-2i} q^{i}$$

$$+q\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i} p^{n-2i-1} q^{i}\Big)$$

$$+B\Big(p\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i} p^{n-2i-1} q^{i}$$

$$+q\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_{n-i-2}^{i} p^{n-2i-2} q^{i}\Big)$$

$$=A\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_{n-i+1}^{i} p^{n-2i+1} q^{i}$$

$$+B\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-i}^{i} p^{n-2i} q^{i}$$

$$=a_{n+1}.$$

由此可见　$a_1=a$，$a_2=b$，$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n(pq\neq 0)$时，有

$$a_n=A\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-i}^{i} p^{n-2i} q^{i}+B\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-i-1}^{i} p^{n-2i-1} q^{i},$$

$$A=-\frac{1}{q}\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & p \end{vmatrix},\quad B=\frac{1}{q}\begin{vmatrix} a & b \\ p & (p^2+q) \end{vmatrix}.$$

这样，我们便得到二阶线性递推关系给出的数列用组合数表达的形式了．尤其是 $a=b=1, p=q=1$ 时，上面形式就是斐波那契数的组合数表示式。

练 习 二

1．用特征方程的方法求下列数列的通项：

(i) $\{a_n\}$ 满足 $a_1=10, a_2=16, a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$;

(ii) $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=5, a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$;

(iii) $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=2a_{n+1}-2a_n$.

2．用变换的方法求下列数列的通项：

(i) $\{x_n\}$ 满足 $x_1=7, x_{n+1}=5x_n+2\cdot 3^{n+1}-4$.

(ii) 设 $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{3}x}{\sqrt{3}-x}$，$f(x_1)=1982$,

$x_{n+1}=f(x_n)$，求 x_{1981}.

(iii) $\{a_n\}$满足 $x_1=1, x_2=2, x_n=n(x_{n-1}+x_{n-2})$ $(n\geqslant 3)$.

(iv) $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$.

3．$\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n^2-2$，该数列称为麦森数列，其最初几项为：3,7,47,2207,4870847,…试证它也可定义为$a_n=F_{2^{n+1}}\div F_{2^n}$，其中 $\{F_n\}$ 是斐波那契数列.

4．$\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}$,

试证 $a_n=\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$，其中$\{F_n\}$是斐波那契数列.

5．$\{a_n\}$满足 $a_0=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3-2a_n}$，求数列的通项.

6．$\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_2=3$，$2a_{n+2}+a_{n+1}-3a_n+2^n=0$，求数列的通项.

7．$\{a_n\}$ 满足 $a_1=a>2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{2(a_n-1)}$，求数列的通项.

8．$\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}a_n-2n^2(a_{n+1}-a_n)=-1$.求数列的通项.

第三章　斐波那契数的求和

求和问题是数列学习乃至高等数学研究中的一个重要课题。如何求斐波那契数的和呢？

学习等差数列和等比数列时，我们已经积累了一些处理数列求和方面的经验，处理斐波那契数的求和问题将凭借这些经验与方法作某些延拓，现分述如下．

§3.1　拆项消去法

将数列的每一项拆成若干项的代数和，在把数列各项相加时，消去其中的许多项，这是数列求和的一种常用方法，诸如$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$求和时，就是采用拆项的办法，把$\frac{1}{(k-1)\cdot k}(k=2,3,\cdots,n)$拆成$\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$，然后在求$(n-1)$项和时，消去许多项，得结果为$1-\frac{1}{n}$的．根据这个想法，我们来求一些斐波那契数的和．

(1)　前 n 项斐波那契数的和：$F_1+F_2+\cdots+F_n$．

根据斐波那契数列的递推关系$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，有$F_n=F_{n+2}-F_{n+1}$，这就导致我们产生用拆项相消的方法来解决前 n 项斐波那契数求和的念头．

$$F_1=F_3-F_2,$$
$$F_2=F_4-F_3,$$
$$\cdots\cdots$$

$$F_n=F_{n+2}-F_{n+1}.$$

将上面 n 个等式两边分别相加，得

$$F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1.$$

(2) **下标为奇数的前 n 项斐波那契数的和：**

$$F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}.$$

由递推关系式 $F_{2n-1}=F_{2n}-F_{2n-2}$，有

$$F_1=F_2,$$
$$F_3=F_4-F_2,$$
$$F_5=F_6-F_4,$$
$$\cdots\cdots$$
$$F_{2n-1}=F_{2n}-F_{2n-2}.$$

将上面 n 个等式两边分别相加，得

$$F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}.$$

在性质(1)、(2)的解题过程中，就使我们悟出斐波那契数及有关数列求和的一种常用的想法.

例 1 试证 $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}.$

证明 本题用拆项相消法来证明. 由斐波那契数性质1，$F_k^2=F_kF_{k+1}-F_kF_{k-1}$，得

$$F_2^2=F_2F_3-F_2F_1,$$
$$F_3^2=F_3F_4-F_3F_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$F_n^2=F_nF_{n+1}-F_nF_{n-1}.$$

将上面 $n-1$ 个等式两边分别相加，并注意到 $F_1^2=F_1F_2$，可推得

$$F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}.$$

上面便是前 n 项斐波那契数的平方和公式.

例 2 试证明

$$\text{arcctg}1=\text{arcctg}2+\text{arcctg}5+\text{arcctg}13+\text{arcctg}34+\cdots,$$

式中这些整数是斐波那契数列中相间出现的那些数。(美国数学月刊,问题征解第 3801 题,第 45 卷 11 月).

本题即须证明 $\text{arcctg}F_2=\text{arcctg}F_3+\text{arcctg}F_5+\text{arcctg}F_7+\text{arcctg}F_9+\cdots$.

我们发现

$$\text{arcctg}F_{2n}-\text{arcctg}F_{2n+1}=\text{arcctg}\frac{F_{2n}F_{2n+1}+1}{F_{2n+1}-F_{2n}}$$

$$=\text{arcctg}\frac{F_{2n}F_{2n+1}+1}{F_{2n-1}}$$

根据斐波那契数性质 5,

$$F_{2n+2}F_{2n-1}-F_{2n}F_{2n+1}=1,$$

有 $$F_{2n}F_{2n+1}+1=F_{2n+2}F_{2n-1},$$

于是 $$\text{arcctg}F_{2n}-\text{arcctg}F_{2n+1}=\text{arcctg}F_{2n+2}.$$

上式给我们提供了一个拆项消去法的依据. 如果你记得的话,在本书第一章例题 1 中有结论:$A_n+A_{n+1}=A_{n-1}$,其中 n 为奇数,$n\geqslant 3$,且 $\text{ctg}A_n=F_n$.事实上,由 $A_{2n+1}+A_{2n+2}=A_{2n}$ 便可得 $\text{arcctg}F_{2n+1}+\text{arcctg}F_{2n+2}=\text{arcctg}F_{2n}$,这就是上面所推得的关系式. 现在我们给出证明如下:

证明 由上述分析,有下面关系式

$$\text{arcctg}F_{2k}-\text{arcctg}F_{2k+1}=\text{arcctg}F_{2k+2},$$

取 $k=1,2,\cdots,n$,

$$\text{arcctg}F_2-\text{arcctg}F_3=\text{arcctg}F_4,$$

$$\text{arcctg}F_4-\text{arcctg}F_5=\text{arcctg}F_6,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\text{arcctg}F_{2n}-\text{arcctg}F_{2n+1}=\text{arcctg}F_{2n+2}.$$

把上面 n 个等式两边分别相加,得

$$\text{arcctg}F_2-\text{arcctg}F_3-\text{arcctg}F_5-\text{arcctg}F_7-\cdots$$

$-\text{arcctg}F_{2n+1}=\text{arcctg}F_{2n+2}$.

即 $\text{arcctg}F_3+\text{arcctg}F_5+\cdots+\text{arcctg}F_{2n+1}=\text{arcctg}F_2$

$-\text{arcctg}F_{2n+2}$,

当 $n\to\infty$ 时 $\text{arcctg}F_{2n+2}$ 趋于 0,

即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\text{arcctg}F_{2k+1}=\text{arcctg}F_2$,

$\therefore$ $\text{arcctg}F_2=\text{arcctg}F_3+\text{arcctg}F_5+\text{arcctg}F_7+\cdots$.

命题成立.

§3.2 应用公式法

经常注意积累数学的有关性质、定理、法则，在解题过程中尽量运用熟悉的性质、定理、法则，将提高解题的速度与质量. 在我们得到一些斐波那契数的求和公式以后，计算有些关于斐波那契数的和时,也可以考虑用已知的结论.

(3) 下标为偶数的前 n 项斐波那契数之和：

$$F_2+F_4+\cdots+F_{2n}.$$

当问题提出的时候,我们马上会想到，在已经求得 $F_1+F_2+\cdots+F_{2n}$ 和 $F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}$ 的求和公式后,只要作差便能求得下标为偶数的前 n 项斐波那契数的和. 这是一种利用已知结果来推导未知结论的解题方法.

$\because$ $F_1+F_2+\cdots+F_{2n}=F_{2n+2}-1$,

$F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$,

将上述两个等式两边分别相减,得

$$F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-1.$$

(4) 下标为 $3k(k=1,2,\cdots,n)$ 的前 n 项斐波那契的和：

$$F_3+F_6+\cdots+F_{3n}.$$

利用斐波那契数列的递推关系,得

$$F_1+F_2=F_3,\ F_4+F_5=F_6,\ \cdots,$$
$$F_{3n-2}+F_{3n-1}=F_{3n}.$$

把上面 n 个等式两边分别相加，得

$$F_3+F_6+\cdots+F_{3n}=(F_1+F_2)+(F_4+F_5)+\cdots+(F_{3n-2}+F_{3n-1})$$

显然 $F_3+F_6+\cdots+F_{3n}=\frac{1}{2}(F_1+F_2+F_3+\cdots+F_{3n})$,

利用已知结论，$F_1+F_2+\cdots+F_{3n}=F_{3n+2}-1$,

$$\therefore\quad F_3+F_6+\cdots+F_{3n}=\frac{1}{2}(F_{3n+2}-1).$$

例 3 试证明 $F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\cdots+F_{2n}F_{2n+1}=F_{2n+1}^2-1$.

证明 由斐波那契数的性质 4,

$$F_{m+n}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1},$$

得 $\quad F_{2n}=F_{n+n}=F_{n-1}F_n+F_nF_{n+1}$.

于是，有 $F_1F_2+F_2F_3=F_4$

$$F_2F_3+F_3F_4=F_6$$

......

$$F_{2n-2}F_{2n-1}+F_{2n-1}F_{2n}=F_{4n-2}$$
$$F_{2n-1}F_{2n}+F_{2n}F_{2n+1}=F_{4n}$$

将上面 $2n-1$ 个等式相加，得

$$2(F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}+F_{2n}F_{2n+1})-F_1F_2-F_{2n}F_{2n+1}=(F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{4n})-F_2.$$

$\because\quad F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{4n}=F_{4n+1}-1$,

$$\therefore\quad 2(F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\cdots+F_{2n}F_{2n+1})=(F_{4n+1}-1)+F_{2n}F_{2n+1},$$

由斐波那契数性质 4，得

$$F_{4n+1}=F_{(2n+1)+2n}=F_{2n}^2+F_{2n+1}^2,$$

又由 $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$ 性质可得

$$F_{2n}F_{2n+2}-F_{2n+1}^2=-1.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & 2(F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\cdots+F_{2n}F_{2n+1})\\ &=F_{2n}^2+F_{2n+1}^2+F_{2n}F_{2n+1}-1\\ &=F_{2n}(F_{2n}+F_{2n+1})+F_{2n+1}^2-1\\ &=F_{2n}F_{2n+2}+F_{2n+1}^2-1\\ &=F_{2n+1}^2-1+F_{2n+1}^2-1=2(F_{2n+1}^2-1).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\cdots+F_{2n}F_{2n+1}=F_{2n+1}^2-1.$$

§3.3 比内公式法

利用已知求和公式的方法是一种有用的求和方法．但是这种求和方法需要在熟悉已知的斐波那契数求和公式基础上才能进行，如果这一条件不具备，解题思路就会受阻．比如在求得 $F_1+F_2+\cdots+F_n$、$F_2+F_4+\cdots+F_{2n}$ 及 $F_3+F_6+\cdots+F_{3n}$ 的和的基础上，若再按原来方法求型如 $F_k+F_{2k}+\cdots+F_{nk}$ 的更一般情况下的斐波那契数的和，就比较困难．我们能不能把问题转化为等比数列求和呢？由此，我们想到了比内公式．

仔细观察比内公式 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$，

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

就会发觉它揭示了第 n 项斐波那契数与公比为 α、β 的两个等比数列之间的内在联系，据此想法，比内公式便为我们提供了一种将斐波那契数求和的问题转化为等比数列求和的方法了．比如我们曾经推得

$$F_3+F_6+\cdots+F_{3n}=\frac{1}{2}(F_{3n+2}-1).$$

根据比内公式 $F_{3k}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{3k}-\beta^{3k})$，有

$$F_3+F_6+\cdots+F_{3n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha^3+\alpha^6+\cdots+\alpha^{3n})-(\beta^3+\beta^6+\cdots+\beta^{3n})]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\alpha^3(1-\alpha^{3n})}{1-\alpha^3}-\frac{\beta^3(1-\beta^{3n})}{1-\beta^3}\right],$$

注意到 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的根，有 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$, $\therefore$ $1-\alpha^3=(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)=\beta\cdot[(1+\alpha)+(1+\alpha)]=2\beta(1+\alpha)=2\beta+2\alpha\beta=2(\beta-1)=-2\alpha$.

$\therefore$ $1-\alpha^3=-2\alpha$, $1-\beta^3=-2\beta$.

于是 $F_3+F_6+\cdots+F_{3n}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\alpha^3(1-\alpha^{3n})}{-2\alpha}-\frac{\beta^3(1-\beta^{3n})}{-2\beta}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}[-\alpha^2(1-\alpha^{3n})+\beta^2(1-\beta^{3n})]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}[(\alpha^{3n+2}-\beta^{3n+2})-(\alpha^2-\beta^2)]$$

$$=\frac{1}{2}(F_{3n+2}-F_2)=\frac{1}{2}(F_{3n+2}-1).$$

显见，使用比内公式，把问题转化为等比数列求和，一般就会顺利些.

(5) 下标为 $tk(k=1,2,\cdots,n)$ 的前 n 项斐波那契数的和：如 $F_4+F_8+F_{12}+\cdots+F_{4n}$.

若用其他方法来解这道题将是很困难的．现用比内公式来求和．注意到 $\alpha\beta=-1$，有 $\alpha^4=\frac{1}{\beta^4}$，$\beta^4=\frac{1}{\alpha^4}$，

$$F_4+F_8+F_{12}+\cdots+F_{4n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha^4+\alpha^8+\cdots+\alpha^{4n}]-(\beta^4+\beta^8+\beta^{12}+\cdots+\beta^{4n})]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\alpha^4(1-\alpha^{4n})}{1-\alpha^4}-\frac{\beta^4(1-\beta^{4n})}{1-\beta^4}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\alpha^{4n}}{\beta^4-1}-\frac{1-\beta^{4n}}{\alpha^4-1}\right]$$

$\because$ $\alpha^4=\alpha^2\cdot\alpha^2=(1+\alpha)(1+\alpha)=3\alpha+2$.

同理 $\beta^4=3\beta+2$.

$\therefore$ $F_4+F_8+F_{12}+\cdots+F_{4n}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\alpha^{4n}}{3\beta+1}-\frac{1-\beta^{4n}}{3\alpha+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1-\alpha^{4n})(3\alpha+1)-(1-\beta^{4n})(3\beta+1)}{(3\beta+1)(3\alpha+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3\alpha+1-3\alpha^{4n+1}-\alpha^{4n}-3\beta-1+3\beta^{4n+1}+\beta^{4n}}{1+3(\alpha+\beta)+9\alpha\beta}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{3\sqrt{5}-3(\alpha^{4n+1}-\beta^{4n+1})-(\alpha^{4n}-\beta^{4n})}{-5}$$

$$=\frac{1}{5}(3F_{4n+1}+F_{4n}-3).$$

顺便指出斐波那契数有性质：$3F_{4n+1}+F_{4n}-3$ 能被 5 整除．

按照比内公式的方法，我们也可以轻松地计算 F_5+F_{10}

$+F_{15}+\cdots+F_{5n}=\frac{1}{11}(5F_{5n+1}+4F_{5n}-5)$等.

§3.4 数学归纳法

通过观察、猜测并用数学归纳法来证明，这也是研究某些斐波那契数之和的方法之一.

(6) 前n个交叉项斐波那契数的和：$F_1, -F_2, F_3, -F_4, \cdots, (-1)^{n+1}F_n$.

观察：$F_1-F_2=0$；$F_1-F_2+F_3=2$；

$F_1-F_2+F_3-F_4=-1$；$F_1-F_2+F_3-F_4+F_5=4$；

$F_1-F_2+F_3-F_4+F_5-F_6=-4, \cdots$,

将上面所得的每一项值减去1，得：$-1, 1, -2, 3, -5, 8, -13, \cdots$. 它们构成了形如$\{(-1)^nF_n\}$的数列. 现用数学归纳法证明结论

$$F_1-F_2+F_3-\cdots+(-1)^{n+1}F_n=(-1)^{n-1}F_{n-1}+1 \quad (n\geqslant 2).$$

当$n=2$时，$F_1-F_2=(-1)^1F_1+1=0$.

结论成立.

设$n=k$时，有

$F_1-F_2+F_3-\cdots+(-1)^{k+1}F_k=(-1)^{k-1}F_{k-1}+1$.

当$n=k+1$时，利用假设，有

$$\begin{aligned}(F_1-F_2+F_3-\cdots+(-1)^{k+1}F_k)+(-1)^{k+2}F_{k+1}\\ =(-1)^{k-1}F_{k-1}+1+(-1)^{k+2}F_{k+1}\\ =(-1)^{k-1}[F_{k-1}-F_{k+1}]+1=(-1)^kF_k+1.\end{aligned}$$

∴ 命题成立.

例 4 试证明 $F_1^3+F_2^3+\cdots+F_n^3=\frac{1}{10}[F_{3n+2}$

$$+(-1)^{n-1}6F_{n-1}+5] \quad (n\geq 2).$$

本题是有关斐波那契数高次幂的求和问题。

证明 用比内公式及已知的交叉项斐波那契数的求和公式，得

$$F_k^3=\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k-\beta^k)\right]^3$$

$$=\frac{1}{5\sqrt{5}}[\alpha^{3k}-3\alpha^{2k}\beta^k+3\alpha^k\beta^{2k}-\beta^{3k}]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{3k}-\beta^{3k})-3\alpha^k\beta^k(\alpha^k-\beta^k)\right]$$

$$=\frac{1}{5}[F_{3k}-(-1)^k\cdot 3\cdot F_k].$$

$$\therefore \quad F_1^3+F_2^3+\cdots+F_n^3=\frac{1}{5}\{(F_3+F_6+\cdots+F_{3n})$$

$$+3[F_1-F_2+\cdots+(-1)^{n+1}F_n]\}$$

$$=\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{2}(F_{3n+2}-1)+3[(-1)^{n-1}F_{n-1}+1]\right\}$$

$$=\frac{1}{10}[F_{3n+2}+(-1)^{n-1}\cdot 6F_{n-1}+5].$$

例 5 试证明 $nF_1+(n-1)F_2+(n-2)F_3+\cdots+2F_{n-1}+F_n=F_{n+4}-(n+3)$。

证明 利用数学归纳法，

(i) 当 $n=1$ 时 右边$=F_5-(1+3)=5-4=F_1$，

结论成立。

(ii) 设 $n=k-1$ 时，有

$$(k-1)F_1+(k-2)F_2+(k-3)F_3+\cdots+2F_{k-2}+F_{k-1}$$
$$=F_{k+3}-(k+2) \qquad (1)$$

我们已有

$$F_1+F_2+F_3+\cdots+F_k=F_{k+2}-1 \tag{2}$$

把(1)、(2)两式相加，得

$$kF_1+(k-1)F_2+(k-2)F_3+\cdots+2F_{k-1}+F_k$$
$$=F_{k+3}+F_{k+2}-(k+3)=F_{k+4}-(k+3).$$

∴ 结论在 $n=k$ 时亦成立，故命题成立.

§3.5 辅助因子法

我们曾经学过等比数列前 n 项和公式，它的推导过程是

令 $$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1} \tag{1}$$

(1) 式两边同乘以 q，得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n \tag{2}$$

把(1)－(2)式，便得等比数列的前 n 项和公式

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1).$$

记得用这种方法，我们还解决过通项为 $v_n=[a_1+(n-1)d]\cdot q^n$这类等差数列与等比数列对应项乘积构成的数列，求前 n 项和的问题. 这个方法称辅助因子法. 学习等比数列前 n 项和公式，不仅要会用结论，更要紧的是学会推导公式的思想方法. 这种方法本质上是消去法. 它在解决某些与斐波那契数有关的和数问题时十分有效.

例 6 求 $F_1q+F_2q^2+\cdots+F_nq^n(q\neq0)$.

解 数列 $\{F_nq^n\}$ 是由斐波那契数列与等比数列对应项的积构成的. 从形式上便会让人考虑到用辅助因子法.

(i) $q=1$ 时结论是显然的.

$$F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1.$$

(ii) $q\neq1$ 时

(甲) 当 $q^2+q-1\neq0$ 时，即 $q\neq-\alpha,-\beta$.

令 $$S_n=F_1q+F_2q^2+\cdots+F_nq^n \tag{1}$$

$$qS_n=F_1q^2+\cdots+F_{n-1}q^n+F_nq^{n+1} \tag{2}$$

(1)－(2)式，得

$$\begin{aligned}(1-q)S_n&=F_1q+(F_2-F_1)q^2+(F_3-F_2)q^3+\cdots\\&\quad+(F_n-F_{n-1})q^n-F_nq^{n+1}\\&=F_1q+F_1q^3+F_2q^4+\cdots+F_{n-2}q^n-F_nq^{n+1}\\&=F_1q+q^2[(F_1q+F_2q^2+\cdots+F_{n-2}q^{n-2})\\&\quad+(F_{n-1}q^{n-1}+F_nq^n)]-F_{n-1}q^{n+1}\\&\quad-F_nq^{n+2}-F_nq^{n+1}\\&=F_1q+q^2\cdot S_n-F_{n-1}q^{n+1}\\&\quad-F_nq^{n+2}-F_nq^{n+1}.\end{aligned}$$

移项且整理，得

$$(1-q-q^2)S_n=q-F_{n+1}q^{n+1}-F_nq^{n+2}$$

$\because$ $q\neq-\alpha,-\beta$, $q^2+q-1\neq0$.

于是 $$S_n=\frac{q-F_{n+1}q^{n+1}-F_nq^{n+2}}{1-q-q^2}$$

（乙）当 $q^2+q-1=0$ 时，即 $q=-\alpha$、$-\beta$ 的情况下，不妨计算 $q=-\alpha=\frac{1}{\beta}$ 时的和.

$$F_kq^k=\frac{F_k}{\beta^k}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k-1\right], k=1,2,\cdots,n.$$

$$F_1q+F_2q^2+\cdots+F_nq^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n-n\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\frac{\alpha}{\beta}\left[1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\right]}{1-\frac{\alpha}{\beta}}-\frac{n}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{\alpha\left[1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\right]}{\beta-\alpha}-\frac{n}{\sqrt{5}},$$

整理得 $$S_n=\frac{\alpha F_n-n\beta^n}{\sqrt{5}\,\beta^n}.$$

$$\therefore\quad F_1\beta^{-1}+F_2\beta^{-2}+\cdots+F_n\beta^{-n}=\frac{\alpha F_n-n\beta^n}{\sqrt{5}\,\beta^n}.$$

$$F_1\alpha^{-1}+F_2\alpha^{-2}+\cdots+F_n\alpha^{-n}=\frac{\beta F_n-n\alpha^n}{\sqrt{5}\,\alpha^n}.$$

前面罗列的五种方法是斐波那契数求和的基本方法．下面通过几道例题，说明求和时应该合理地、有针对性地选择求和方法．顺便指出相比之下比内公式较为常用．

例 7 计算 $C_n^1F_1+C_n^2F_2+\cdots+C_n^nF_n$ 的和．

本题用拆项相消和已知求和公式来解都较困难．对组合数与斐波那契数乘积求和，一般可考虑用比内公式，将问题转化为等比数列与组合数之积的求和问题，这样便可用组合数的性质来解题了．

解 $C_n^1F_1+C_n^2F_2+\cdots+C_n^nF_n$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(C_n^1\alpha+C_n^2\alpha^2+\cdots+C_n^n\alpha^n)-(C_n^1\beta+C_n^2\beta^2+\cdots+C_n^n\beta^n)]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(C_n^0\alpha^0+C_n^1\alpha^1+C_n^2\alpha^2+\cdots+C_n^n\alpha^n)-(C_n^0\beta^0+C_n^1\beta^1+C_n^2\beta^2+\cdots+C_n^n\beta^n)]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha+1)^n-(\beta+1)^n].$$

$\because$ α、β 是 $x^2-x-1=0$ 的根，

$\therefore \quad \alpha^2=\alpha+1, \quad \beta^2=\beta+1.$

于是，原式$=\frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{2n}-\beta^{2n}]=F_{2n}.$

$\therefore \quad C_n^1F_1+C_n^2F_2+\cdots+C_n^nF_n=F_{2n}.$

本题是用比内公式和二项式定理为工具求和的．采用类似的方法，还可以求如下一些关于斐波那契数的和：

(1) $C_n^1F_1-C_n^2F_2+C_n^3F_3-\cdots+(-1)^{n+1}C_n^nF_n$;

(2) $C_n^1F_{k+1}+C_n^2F_{k+2}+C_n^3F_{k+3}+\cdots+C_n^nF_{k+n}$;

(3) $C_n^1F_{k+1}-C_n^2F_{k+2}+C_n^3F_{k+3}-\cdots+(-1)^{n+1}C_n^nF_{k+n}$等．

现将上述和数的求法简述如下：

(1) $C_n^1F_1-C_n^2F_2+\cdots+(-1)^{n+1}C_n^nF_n$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(C_n^1\alpha-C_n^2\alpha^2+\cdots+(-1)^{n+1}C_n^n\alpha^n)$$
$$-(C_n^1\beta-C_n^2\beta^2+\cdots+(-1)^{n+1}C_n^n\beta^n)]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[-(1-\alpha)^n+(1-\beta)^n]=\frac{1}{\sqrt{5}}[-\beta^n+\alpha^n]$$

$\therefore \quad C_n^1F_1-C_n^2F_2+\cdots+(-1)^{n+1}C_n^nF_n=F_n.$

(2) $C_n^1F_{k+1}+C_n^2F_{k+2}+\cdots+C_n^nF_{k+n}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(C_n^0\alpha^k+C_n^1\alpha^{k+1}+C_n^2\alpha^{k+2}+\cdots+C_n^n\alpha^{k+n})$$
$$-C_n^0\alpha^k-(C_n^0\beta^k+C_n^1\beta^{k+1}+C_n^2\beta^{k+2}+\cdots$$
$$+C_n^n\beta^{k+n})+C_n^0\beta^k]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^k(\alpha+1)^n-\beta^k(\beta+1)^n-(\alpha^k-\beta^k)]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha^k\cdot\alpha^{2n}-\beta^k\cdot\beta^{2n})-(\alpha^k-\beta^k)]$$
$$=F_{2n+k}-F_k.$$

显然例 7 便是本结论的特殊情况．

(3) $C_n^1F_{k+1}-C_n^2F_{k+2}+\cdots+(-1)^{n+1}C_n^nF_{k+n}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[-(C_n^0\alpha^k-C_n^1\alpha^{k+1}+C_n^2\alpha^{k+2}-\cdots$$

$$+(-1)^nC_n^n\alpha^{k+n})+C_n^0\alpha^k$$

$$+(C_n^0\beta^k-C_n^1\beta^{k+1}+C_n^2\beta^{k+2}-\cdots$$

$$+(-1)^nC_n^n\beta^{k+n})-C_n^0\beta^k]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[-\alpha^k(1-\alpha)^n+\beta^k(1-\beta)^n+(\alpha^k-\beta^k)]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[-\alpha^k\beta^n+\beta^k\alpha^n+(\alpha^k-\beta^k)]$$

当 $n>k$ 时　原式 $=\frac{1}{\sqrt{5}}[-(\alpha\beta)^k(\beta^{n-k}-\alpha^{n-k})$

$+(\alpha^k-\beta^k)]=(-1)^kF_{n-k}+F_k.$

当 $n=k$ 时　原式 $=F_n.$

当 $n<k$ 时　原式 $=\frac{1}{\sqrt{5}}[-(\alpha\beta)^n(\alpha^{k-n}-\beta^{k-n})$

$+(\alpha^k-\beta^k)]=(-1)^{n+1}F_{k-n}+F_k.$

例 8　计算一个正的纯小数，它从小数点后的第一位数起构造如下：小数点后第一位数写上 F_1，第二位数写上 F_2，……，若 F_k 是多位数，则在第 k 位写上 F_k 的个位数，第 $k-1$ 位写上 F_k 的十位数，……，如下图得到一个正纯小数，

```
0
  1
    1
      2
        3
          5
            8
            1 3
              2 1
                  …
------------------------
0.1 1 2 3 5 9 5 5 0 …
```

求它的值.

解 观察正纯小数的构造，可以发现小数点后的几位数可以写成：

$$S_n=F_1\cdot 10^{-1}+F_2\cdot 10^{-2}+\cdots+F_n\cdot 10^{-n} \qquad (1)$$

$$10^{-1}S_n=F_1\cdot 10^{-2}+\cdots+F_{n-1}\cdot 10^{-n}+F_n\cdot 10^{-n-1} \qquad (2)$$

把(1)－(2)式，得

$$\begin{aligned}0.9S_n&=F_1\cdot 10^{-1}+(F_3-F_2)\cdot 10^{-3}\\&\quad+(F_4-F_3)\cdot 10^{-4}+\cdots\\&\quad+(F_n-F_{n-1})\cdot 10^{-n}-F_n\cdot 10^{-n-1}\\&=F_1\cdot 10^{-1}+F_1\cdot 10^{-3}+F_2\cdot 10^{-4}+\cdots\\&\quad+F_{n-2}\cdot 10^{-n}-F_n\cdot 10^{-n-1}\\&=10^{-2}\cdot[(F_1\cdot 10^{-1}+F_2\cdot 10^{-2}+\cdots\\&\quad+F_{n-2}\cdot 10^{-n+2})+F_{n-1}\cdot 10^{-n+1}\\&\quad+F_n\cdot 10^{-n}]-F_{n-1}\cdot 10^{-n-1}\\&\quad-F_n\cdot 10^{-n-2}-F_n\cdot 10^{-n-1}+F_1\cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

$$0.89S_n=F_1\cdot 10^{-1}-F_{n+1}\cdot 10^{-n-1}-F_n\cdot 10^{-n-2}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{F_1\cdot 10^{-1}-F_{n+1}\cdot 10^{-n-1}-F_n\cdot 10^{-n-2}}{0.89}\\&=\frac{10}{89}.\end{aligned}$$

∴ 正纯小数是循环小数，它的值为$\frac{10}{89}$.

例 9 试证明斐波那契数满足：

$$\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{F_{2i-1}F_{2i+1}}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{F_{2i}F_{2i+2}}\right)=1.$$

证明 对 i 取若干特殊值，观察 $1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{F_{2i-1}F_{2i+1}}$ 的取值情况：

$$1+\frac{1}{F_1F_3}=\frac{3}{2},$$

$$1+\frac{1}{F_1F_3}+\frac{1}{F_3F_5}=\frac{8}{5},$$

$$1+\frac{1}{F_1F_3}+\frac{1}{F_3F_5}+\frac{1}{F_5F_7}=\frac{21}{13}\cdots$$

便推断 $1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{F_{2i-1}F_{2i+1}}=\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}$ (1)

同理，$1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{F_{2i}F_{2i+2}}=\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}$ (2)

现根据数学归纳法，证明等式(1)。

(1) 当 $n=1$ 时，由分析可知结论成立.

(2) 当 $n=k$ 时，设有 $1+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{F_{2i-1}F_{2i+1}}=\frac{F_{2k+2}}{F_{2k+1}}$,

$n=k+1$ 时，由假设，得

$$1+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{F_{2i-1}F_{2i+1}}=\frac{F_{2k+2}}{F_{2k+1}}+\frac{1}{F_{2k+1}F_{2k+3}}$$

$$=\frac{F_{2k+2}F_{2k+3}+1}{F_{2k+1}F_{2k+3}},$$

如果斐波那契数有性质

$F_{2k+2}F_{2k+3}+1=F_{2k+4}F_{2k+1}$，则上式便等于

$$\frac{F_{2k+4}}{F_{2k+3}}$$

结论成立了.然而结论

$F_{2k+4}F_{2k+1}-F_{2k+2}F_{2k+3}=1$，是第一章的性质 5,

$$\therefore\quad 1+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{F_{2i-1}F_{2i+1}}=\frac{F_{2k+2}F_{2k+3}+1}{F_{2k+1}F_{2k+3}}$$

$$=\frac{F_{2k+4}F_{2k+1}}{F_{2k+1}F_{2k+3}}$$

$$=\frac{F_{2k+4}}{F_{2k+3}}$$ 命题成立.

同理可用数学归纳法证明

$1-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{F_{2i}F_{2i+2}}=\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}$. 综上所述,

$$\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{F_{2i-1}F_{2i+1}}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{F_{2i}F_{2i+2}}\right)=1.$$

练 习 三

1. 对斐波那契数列$\{F_n\}$,求和

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{5}{3\cdot 8}+\cdots+\frac{F_{n+1}}{F_nF_{n+2}}.$$

2. 数列$\left\{\frac{F_n}{2^n}\right\}$满足 $F_1=F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$,

   试证明 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{F_n}{2^n}<2$.

3. 对斐波那契数列$\{F_n\}$,证明它的前 n 项和介于 F_{n+1} 和 F_{n+2} 之间.

4. 求第 k 项起,连续 N 项斐波那契数之和.

5. 试证明 $F_1F_2+F_3F_4+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$.

6. 求 $F_5+F_{10}+\cdots+F_{5n}$ 之和.

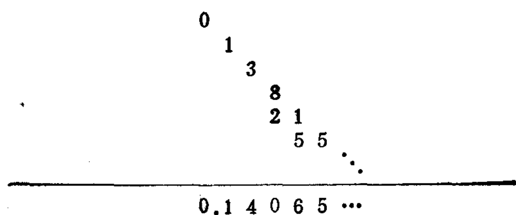
7. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{(2n+1)a_n+1}$,

   试求$\frac{1}{\sqrt{a_1a_n}}+\frac{1}{\sqrt{a_2a_{n-1}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_na_1}}$.

8. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$, $a_{2n}=2a_{2n-1}, a_{2n+1}=a_{2n}+2^{n-1}$, 试计算 $a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$.

9. 把斐波那契数列中的各数,从第一项起依次取奇数项,构成一个正纯小数,它从小数点后的第一位起构造如下:小数点后第一位数写F_1, 第二位数写F_3,…, 若第$2k-1$位是多位数, 则在第k位写上F_{2k-1}的个位数,第$k-1$位写上F_{2k-1}的十位数,……,求如下的正

纯小数的值：



第四章　斐波那契数的数论性质

只要对斐波那契数列 1,1,2,3,5,8, … 稍加观察，就会发觉它是按奇、奇、偶、奇、奇、偶……的规律排列的. 在第一章所述的性质中，有 $F_{m+n}^2-F_{m-n}^2=F_{2m}F_{2n}$ 这个结论，该性质说明下标为 $m+n$ 和 $m-n$ 的斐波那契数的平方差能被 F_{2m} 和 F_{2n} 整除. 此外我们曾经得到前 n 项斐波那契数的平方和公式：$\sum_{i=1}^{n}F_i^2=F_nF_{n+1}$，公式说明前 n 项斐波那契数的平方和是合数，它能被 F_n 和 F_{n+1} 整除……. 斐波那契数在整数论方面有着许多有趣的性质. 下面对斐波那契数关于整数论方面的性质作粗浅的介绍：

确定两数互质与否是数论中最常见的课题. 满足哪些条件的两个斐波那契数是互质的呢？我们现在来讨论这些问题.

性质 1　相邻的两项斐波那契数互质，即 $(F_n, F_{n+1})=1$*.

一般地说，两个整数 A、B，若存在整数 M、N，使 $AM+BN=1$，则可推得 A、B 互质. 这是因为 A、B 如果有公因子 d，则 d 能整除 1，可见 $d=1$，故 A、B 互质. 讨论是否存在整数 M、N，使满足关系 $AM+BN=1$，是证明 A、B 互质的常用方法。

事实上，斐波那契数有性质：$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$. 由此可见，对 F_n、F_{n+1}，所存在的两数 M、N 分别取 F_{n-1}、F_n，因

* 表示 F_n 和 F_{n+1} 的最大公约数为1.

此 F_n、F_{n+1} 互质.

根据观察，不仅是相邻的两项，而且满足一定关系而互质的斐波那契数是不少的. 如：

例 1 试证明$(F_{4k},F_{4k+2})=1,k=1,2,\cdots$.

证明 由比内公式，得

$$
\begin{aligned}
&F_{4k}^2-F_{4k+2}\cdot F_{4k-2}\\
&=\frac{1}{5}(\alpha^{4k}-\beta^{4k})^2-\frac{1}{5}(\alpha^{4k+2}-\beta^{4k+2})(\alpha^{4k-2}-\beta^{4k-2})\\
&=\frac{1}{5}[-2\alpha^{4k}\beta^{4k}+\alpha^{4k+2}\beta^{4k-2}+\alpha^{4k-2}\beta^{4k+2}]
\end{aligned}
$$

$\because$ $\alpha\beta=-1,\alpha^4=\alpha^2\cdot\alpha^2=(\alpha+1)(\alpha+1)=3\alpha+2$.

$\therefore$ 原式$=\frac{1}{5}[-2+(\alpha\beta)^{4k-2}(\alpha^4+\beta^4)]$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{5}[-2+(3\alpha+2)+(3\beta+2)]\\
&=\frac{1}{5}[-2+7]=1.
\end{aligned}
$$

由 $F_{4k}^2-F_{4k+2}F_{4k-2}=1$，

得 $(F_{4k},F_{4k+2})=1$.

上述性质的证明为我们提供了证明两数互质的一种思路，按照这种思路，我们可用以推得其他一些递推数列中两数互质的结论.

例 2 已知 $T_1=2,T_{n+1}=T_n^2-T_n+1$.

试证明 $(T_m,T_n)=1,m,n\in N$.

(第 16 届普特南数学竞赛B—6.)

证明 不妨设 $m>n$. 由

$$T_{n+1}=T_n^2-T_n+1$$

移项，得 $T_{n+1}-1=T_n(T_n-1)$

即有 $T_n-1=T_{n-1}(T_{n-1}-1)$

于是 $T_{n+1}-1=T_n(T_n-1)=T_nT_{n-1}(T_{n-1}-1)=\cdots$

$$=T_nT_{n-1}\cdots T_2T_1(T_1-1),$$

$\therefore$ $T_{n+1}=1+\prod_{i=1}^{n}T_i$，写成 $T_m=1+\prod_{i=1}^{m-1}T_i$.

从等式 $T_m-T_{m-1}T_{m-2}\cdot\cdots T_n\cdots T_2T_1=1$,

推得对数列$\{T_n\}$中任意两项，均有

$$(T_m,T_n)=1.$$

整除问题是数论研究的另一个重要内容. 斐波那契数在整除方面的性质更是丰富多彩. 其中比较重要的有:

性质 2 对于任意两个正整数 m、n，若 m 能整除 n，则 F_m 也能整除 F_n.

性质 2 揭示了确定斐波那契数之间整除的一个条件，即下标之间是否满足整除关系.

证明 由条件设 $n=km$，对 k 用数学归纳法证明:

当 $k=1$ 时，结论显然成立.

设取 k 时，有 F_m 能整除 F_n.

当取 $k+1$ 时，

$$F_n=F_{(k+1)m}=F_{km-1}F_m+F_{km}F_{m+1} \qquad (1)$$

由假设 F_m 能整除 F_{km}，F_m 能整除 $F_{km}F_{m+1}$，可见 F_m 能整除(1)式右边.

$\therefore$ 当 m 能整除 n 时，F_m 能整除 F_n.

记性质 2 为 若 $m|n$*，则 $F_m|F_n$.

例 3 试证明 $(F_{nk-1},F_n)=1,k=1,2,\cdots$.

证明 若$(F_{nk-1},F_n)=d,d\neq1$.

---

* 表示m能整除n.

则 $d|F_n$，由性质 2 $F_n|F_{nk}$，故有 $d|F_{nk}$.

同理 $d|F_{nk-1}$，即 d 是 F_{nk-1}，F_{nk} 的公因子，由性质 1，F_{nk-1}，F_{nk} 互质，所以矛盾.

由此可得 $(F_{nk-1}, F_n)=1$.

性质 3 F_m、F_n 是斐波那契数，若 F_m 能整除 F_n，那末必有 m 能整除 n.

证明 已知 $F_m|F_n$，若 $n=mq+r$，$0<r<m$，$r,q\in Z$. 即 m 不能整除 n. 那末

$$F_n=F_{mq+r}=F_{mq-1}F_r+F_{mq}F_{r+1},$$

由性质 2，$F_m|F_{mq}$，由条件 $F_m|F_n$，

可见 $F_m|F_{mq-1}F_r$. 而由例 3，

$(F_m, F_{mq-1})=1$，得 $F_m|F_r$ 矛盾.

∴ 命题成立.

性质 3 记作 若 $F_m|F_n$，则 $m|n$.

由性质 2、性质 3 可以推得 F_m 整除 F_n 的充要条件是 m 整除 n. 根据这一结论，便可以推出斐波那契数有关整除性质许多有趣的性质，譬如：

若 n 是异于 4 的合数，则 F_n 也必定是合数. 这一性质即说明斐波那契数中有无穷多个合数，并且性质也揭示了下标的数论性质与斐波那契数的数论性质之间的内在关系.

这个性质可由如下叙述来说明：由 n 是异于 4 的合数，故 $n=pq$，不妨设 $p>q$，则有 $p\geqslant 3$（否则 $pq\leqslant 4$）. 显然 $F_p\geqslant 2$，由性质 2，$F_p|F_n$，故 F_n 是合数.

此外，由性质 2 和性质 3 可以得到斐波那契数能被某些整数整除的许多性质，譬如：

F_n 是偶数的充要条件是 $n=3k(k\in N)$.

F_n 能被 3 整除的充要条件是 $n=4k(k\in N)$.

F_n能被 5 整除的充要条件是 $n=5k(k\in N)$.

F_n能被 8 整除的充要条件是 $n=6k(k\in N)$.

F_n能被 13 整除的充要条件是 $n=7k(k\in N)$.

……

又如 $F_7=13$, $7|7k$ 是 $F_7|F_{7k}$ 的充要条件，即说明$13|F_n$的充要条件是 $n=7k$. 由上述一些性质可以很快算出前 1000 个斐波那契数中有 333 个偶数，有 200 个数能被 5 整除等.

例 4 数列$\{F_n\}$, $F_1=F_2=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant 3)$.

试证明 有唯一组正整数 a、b、m，使得 $0<a<m$, $0<b<m$，并且对一切正整数 n，有 F_n-anb^n能被 m 整除(1983 年英国数学竞赛试题).

证明 先分析 a、b、m 的可能取值，然后再证明唯一性：

$F_1-ab=1-ab\equiv 0(\bmod m)$, $\therefore (m,ab)=1$.

$F_2-2ab^2=1-2ab^2\equiv 0(\bmod m)$. 由此可得

$(1-2ab^2)-(1-ab)=ab(2b-1)\equiv 0(\bmod m)$*.

$\because (m,ab)=1$, $\therefore 2b-1\equiv 0(\bmod m)$.

当 $n>2$ 时，

若 $F_{n-2}-a(n-2)b^{n-2}\equiv 0$, $F_{n-1}-a(n-1)b^{n-1}\equiv 0$ $(\bmod m)$. 则

$$
\begin{aligned}
F_n-anb^n &= F_{n-2}+F_{n-1}-anb^n \\
&= F_{n-2}-a(n-2)b^{n-2}+a(n-2)b^{n-2} \\
&\quad +F_{n-1}-a(n-1)b^{n-1}+a(n-1)b^{n-1}-anb^n \\
&\equiv a(n-2)b^{n-2}+a(n-1)b^{n-1}-anb^n \\
&\equiv ab^{n-2}[(n-2)+b(n-1)-nb^2] \\
&\equiv (n-2)+b(n-1)-nb^2 \quad (\bmod m).
\end{aligned}
$$

* $ab(2b-1)\equiv 0(\bmod m)$表示：$ab(2b-1)$和0的差是正整数$m$的整数倍. 读作$ab(2b-1)$和0对于模$m$是同余的.

经分析 $4(n-2)+4b(n-1)-4nb^2$

$$=2b\cdot 2(n-1)+4(n-2)-(2b)^2\cdot n$$

$$=(2b-1)[2(n-1)]+2(n-1)+4(n-2)$$
$$-[(2b)^2-1]n-n$$

$$=(2b-1)[2(n-1)]-(2b-1)(2b+1)\cdot n$$
$$+5n-10$$

$$=(2b-1)[2(n-1)-n(2b+1)]+5(n-2).$$

由于 $2b-1\equiv 0(\bmod m)$，得

$F_n-anb^n\equiv 5(n-2)(\bmod m)$.

显然要使 $F_n-anb^n\equiv 0(\bmod m)$. 因 n 可为一切自然数，则只有 $m=5$. 由 $2b-1\equiv 0(\bmod 5)$，$0<b<5$，得 $b=3$. 又由 $1-ab=1-3a\equiv 0(\bmod 5)$，$0<a<5$，得

$a=2$. 即 $a=2, b=3, m=5$.

现用数学归纳法证明对一切 n，有 $F_n-2\cdot n\cdot 3^n$ 能被 5 整除.

当 $n=1,2$ 时，$F_1-2\cdot 3=-5$，

$F_2-2\cdot 2\cdot 3^2=-35$，命题成立.

设当 $n=k-2, k-1$ 时，有

$$F_{k-2}-2(k-2)3^{k-2}\equiv 0(\bmod m),$$
$$F_{k-1}-2(k-1)3^{k-1}\equiv 0(\bmod m).$$

当 $n=k$ 时，

$$F_k-2\cdot k\cdot 3^k=F_{k-1}+F_{k-2}-2\cdot k\cdot 3^k$$
$$=F_{k-1}-2(k-1)3^{k-1}+F_{k-2}-2(k-2)3^{k-2}$$
$$+2(k-1)\cdot 3^{k-1}+2(k-2)3^{k-2}-2\cdot k\cdot 3^k$$
$$\equiv 2(k-1)\cdot 3^{k-1}+2(k-2)\cdot 3^{k-2}-2k\cdot 3^k$$
$$\equiv 2\cdot 3^{k-2}[3(k-1)+(k-2)-9k]$$
$$\equiv 2\cdot 3^{k-2}(-5k-5)\equiv -5\cdot 2\cdot 3^{k-2}(k+1)$$

$\equiv 0 \pmod 5$.

∴命题成立。

由此可见满足题设的是唯一组正整数：

$$a=2, b=3, m=5.$$

例 5 已知 $a_0=0, a_1=1, a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$，

试证明 $2^k|a_n$ 的充要条件是 $2^k|n$.

(第 29 届 IMO 预选题)

证明 问题实质是当且仅当 $n=2^k(2p+1)(p\in N)$ 时，有 $2^k|a_n$.

由 $a_0=0, a_1=1$ 及递推关系 $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}(n>1)$，可得数列的通项公式

$$a_n=\frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

设 $(1+\sqrt{2})^n=A_n+\sqrt{2}B_n$ (1)

$(1-\sqrt{2})^n=A_n-\sqrt{2}B_n$ (2)

$A_n, B_n\in N$.

(1)、(2)两式相减，可得 $a_n=B_n$.

(1)、(2)两式相乘，可得 $A_n^2-2B_n^2=(-1)^n$.

根据上式可知 A_n 恒为奇数，得 $A_n^2\equiv 1 \pmod 4$. 当 n 为奇数时，$2B_n^2=A_n^2+1\equiv 2 \pmod 4$.

∴ B_n 亦是奇数. 即 $n=2^0(2p+1)$ 时，B_n 是奇数，故命题 $2^0|a_n\Leftrightarrow 2^0|n$ 成立.

现对 k 用数学归纳法，设 $n=2^k(2p+1)$，$k, p=0,1,2,\cdots$.

当 $k=0$ 时，即 n 取奇数时，上面结论已说明命题成立.

设结论对取 k 时成立. 因为

$(1+\sqrt{2})^{2n}=(A_n+\sqrt{2}B_n)^2=A_{2n}+\sqrt{2}B_{2n}$.

∴ $B_{2n}=2A_nB_n$. 又 A_n 是奇数，由假设 $2^k|B_n$，而 $2^{k+1}\nmid B_n$.

∴ $2^{k+1}|B_{2n}$，$2^{k+2}\nmid B_{2n}$.

即对一切非负整数 k 有 $2^k|a_{2^k(2p+1)}$，

$2^{k+1}\nmid a_{2^k(2p+1)}$. 即当且仅当 $2^k|n$ 时，

$2^k|a_n$. 命题成立.

了解了性质 2、性质 3 之后，再观察斐波那契数列1、1、2、3、5、8、13、21、34、…，会发现下标为 3，9，15，…的斐波那契数是 2，34，610，…，它们是偶数，但是不能被 4 整除. 结合 $F_6|F_{6k}$（即型如 F_{6k}的斐波那契数能被 8 整除），就会有如下性质：

性质 4 斐波那契数中不存在除以 8 的余数为 4 的数.

因为形如 F_{3k} 的斐波那契数都是偶数，而形如 F_{6k} 的斐波那契数都能被 8 整除. 如果能够证明形如 F_{6k+3} 的斐波那契数除以 4 余 2，由结论的充要性，性质 4 便是显然的了.

证明 由性质 2、性质 3，斐波那契数 F_n 是偶数的充要条件是 $n=3k$. $8|F_n$ 的充要条件是 $n=6k$. 故要证明不存在被 8 除余 4 的斐波那契数，只要证明F_{6k+3}除以 4 余 2.

由数学归纳法，证 $F_{6k+3}\equiv 2(\bmod 4)$.

当 $n=1$ 时，$F_9=34\equiv 2(\bmod 4)$命题成立.

设 $n=k$ 时，有 $F_{6k+3}\equiv 2(\bmod 4)$.

当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
F_{6(k+1)+3}=F_{(6k+3)+6}&=F_{6k+2}F_6+F_{6k+3}\cdot F_7\\
&=8F_{6k+2}+13F_{6k+3}\\
&\equiv 13F_{6k+3}\equiv 12F_{6k+3}+F_{6k+3}\\
&\equiv F_{6k+3}\equiv 2(\bmod 4).
\end{aligned}
$$

∴ 命题成立.

同样还可以证明斐波那契数中不存在能被17整除的数.

用上述方法处理一类不能被某数整除的问题是比较有用的。

例 6 已知 $a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+\sqrt{5a_n^2+4}}{2}$

$$n=1,2,3,\cdots.$$

试证明 (1)a_n 是整数；(2)不可能存在整数 N，使$1989|a_{2N}$.

对于递推式中含有根号的数列，要证明a_n是整数，有时可以通过观察来发现该数列是否与一个用线性递推式给出的数列等价.

证明 $a_1=0,a_2=1,a_3=3,a_4=8,a_5=21,\cdots$. 经观察$\{a_n\}$满足递推关系$a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$ $n=2,3,\cdots$. 易用数学归纳法证得结论成立.

由 a_1,a_2 是整数，易知 a_n 取整数.

现用反证法证不可能存在整数 N，使 $1989|a_{2N}$.

如果存在 N_0，使$1989|a_{2N_0}$，$\because 3|1989$，

$\therefore$ $3|a_{2N_0}$.

而 $a_{2N_0}=3a_{2N_0-1}-a_{2N_0-2}\equiv -a_{2N_0-2}(\bmod 3)$.

于是 $3|a_{2N_0}, 3|a_{2N_0-2},\cdots,3|a_4,3|a_2$. 但是 $a_2=1$，矛盾.

$\therefore$ 不可能存在 N，使 $1989|a_{2N}$.

如果上述证明中数列的线性递推关系式 $a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$ 一时不易观察出来，这种情况下亦可作变换来进行推导：

由原式可得 $2a_{n+1}-3a_n=\sqrt{5a_n^2+4}$，

$$4a_{n+1}^2-12a_{n+1}a_n+9a_n^2=5a_n^2+4,$$

整理，得 $a_{n+1}^2-3a_{n+1}a_n+a_n^2=1$，同理即有

$$a_n^2-3a_na_{n-1}+a_{n-1}^2=1,$$

上下两式相减，有

$$(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}+a_{n-1})-3a_n(a_{n+1}-a_{n-1})=0,$$

$$(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}-3a_n+a_{n-1})=0.$$

$\because$ $a_{n+1}\neq a_{n-1}$，得数列会有递推关系

$a_{n+1}-3a_n+a_{n-1}=0$. 这样便可推得 a_n 是整数. 在证明含根号的递推关系所给出的数列是整数数列，一种常见的方法是将数列转化为用线性递推关系给出的数列.

最后，关于整除性质的讨论，我们还会注意到，若 $m|n$，有 $F_m|F_n$，那末$\frac{F_n}{F_m}$会取什么样的值呢？

例 7 试证明 若 $n=km$(m, k 不等于 1)，则有

$$\frac{F_n}{F_m}=\sum_{i=0}^{k-1}C_k^iF_m^{k-(i+1)}F_{m-1}^iF_{m-i}.$$

证明 命题与二项式系数有关，一般可作如下考虑：由第一章结论，

$$\alpha^n=F_n\alpha+F_{n-1},\ \alpha^m=F_m\alpha+F_{m-1}.$$

$$\alpha^{km}=(F_m\alpha+F_{m-1})^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^iF_m^{k-i}\alpha^{k-i}F_{m-1}^i$$

$$\because\quad C_k^iF_m^{k-i}F_{m-1}^i\alpha^{k-i}=C_k^iF_m^{k-i}F_{m-1}^i(F_{k-i}\alpha+F_{k-i-1})$$

$$=C_k^iF_m^{k-i}F_{m-1}^iF_{k-i}\alpha+C_k^iF_m^{k-i}F_{m-1}^iF_{k-i-1}$$

$$\alpha^{km}=\sum_{i=0}^{k}(C_k^iF_m^{k-i}F_{m-1}^iF_{k-i}\alpha+C_k^iF_m^{k-i}F_{m-1}^iF_{k-i-1})\quad(1)$$

又 $\because$ $\alpha^{km}=\alpha^n=F_n\alpha+F_{n-1}$ (2)

根据 α 是无理数，比较(1)、(2)两式右边的系数，便有

$$F_n=\sum_{i=0}^{k-1}C_k^iF_m^{k-i}F_{m-1}^iF_{k-i},$$

于是

$$\frac{F_n}{F_m}=\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i F_m^{k-i-1} F_{m-1}^i F_{k-i}.$$

命题成立.

在数论方面还有一个课题是求两数的最大公约数.

性质 5 $(F_m, F_n)=F_{(m,n)}$.

证明 假定 $n>m$, 由欧几里德辗转相除法

$$\begin{aligned}
n&=mq_0+r_1 & 0&\leqslant r_1<m,\\
m&=r_1q_1+r_2 & 0&\leqslant r_2<r_1,\\
r_1&=r_2q_2+r_3 & 0&\leqslant r_3<r_2,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
r_{t-2}&=r_{t-1}q_{t-1}+r_t & 0&\leqslant r_t<r_{t-1}.\\
r_{t-1}&=r_tq_t.
\end{aligned}$$

于是使得 r_t 是 m,n 的最大公约数, 即 $(m,n)=r_t$. 由 $n=mq_0+r_1$, 得

$$\begin{aligned}
(F_n, F_m)&=(F_{mq_0+r_1}, F_m)\\
&=(F_{mq_0-1}F_{r_1}+F_{mq_0}F_{r_1+1}, F_m)
\end{aligned}$$

$\because \quad F_m | F_{mq_0}, (F_{mq_0-1}, F_m)=1,$

有 $(F_n, F_m)=(F_{mq_0-1}F_{r_1}, F_m)=(F_{r_1}, F_m)$, 同理, $(F_{r_1}, F_m)=(F_{r_1}, F_{r_2})=\cdots=(F_{r_t}, F_{r_{t-1}})$.

$\because \quad F_{r_t} | F_{r_{t-1}}, \quad \therefore \quad (F_{r_t}, F_{r_{t-1}})=F_{r_t}=F_{(m,n)}.$

于是便有 $(F_m, F_n)=F_{r_t}=F_{(m,n)}$.

性质 5 提供了求任意两个斐波那契数的最大公约数的方法.

由性质 5 还可以推得, 如果整数 d, 能够整除 F_n 和 F_m, 那末 d 必能整除 F_{n+m} 和 F_n, 反之结论亦成立.

这一性质由性质 5 是很容易推出的. 因为 d 能整除 F_n 和 F_m, 则 $d|(F_n, F_m)$. 又

$$(m,n)|(m+n,n),$$

即 m,n 的最大公约数必能整除 m、n，亦能整除 $m+n$ 和 n，故 $(m,n)|(m+n,n)$.

由性质 5，$(F_m,F_n)=F_{(m,n)}|F_{(m+n,n)}=(F_{m+n},F_n)$. 于是可推得 $d|(F_{m+n},F_n)$. 反之亦可用同样方法证明.

例 8 $\{F_n\}$：$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

求 (F_{1960},F_{1988})（第 26 届 IMO 预选题）.

解 由欧几里德辗转相除法：

$$1988=1960+28,\ 1960=28\times70.$$

$\therefore$ $(1960,1988)=28$.

得 $(F_{1960},F_{1988})=F_{28}$.

如果仔细考虑性质 5，便会发觉性质 5 与一开始有关两个斐波那契数之间的互质问题有许多内在联系.

譬如两个连续的自然数互质，即它们有 $(n,n+1)=1$. 由性质 5，$(F_n,F_{n+1})=F_{(n,n+1)}=F_1=1$，即两个相邻的斐波那契数互质. 可见性质 1 是性质 5 的特殊情况.

又如，例 2 的结论是 $(F_{4n},F_{4n+2})=1$，事实上 $(4n,4n+2)=2$，根据性质 5 便有

$$(F_{4n},F_{4n+2})=F_{(4n,4n+2)}=F_2=1.$$

可见由性质 5 亦可以推得下标为两个连续偶数的斐波那契数互质. 这样我们对证明两个斐波那契数互质又有一个新的方法了. 根据例 2 及性质 5，我们还马上可以推得两个斐波那契数，只要下标的最大公约数是 2，这两个斐波那契数必互质，如 $(6k,6k+2)=2$. 于是我们亦可以推得 $(F_{6k},F_{6k+2})=1$，等等.

例 9 已知 $L_1=1$，$L_2=3$，$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$（鲁卡斯数列）.

试证明 (1)若 F_n 是奇数，则 L_n 也是奇数，并有$(F_n, L_n)=1$.

(2)若 F_n 是偶数，则 L_n 也是偶数，并有$(F_n, L_n)=2$.

证明 我们已经求得斐波那契数的通项的比内公式，

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n),$$

其中 α、β 是特征方程 $x^2-x-1=0$的根，

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

用同样方法，可以导得鲁卡斯数的通项表达式．$L_n=\alpha^n+\beta^n$.

$$\begin{aligned}L_n^2-5F_n^2&=(\alpha^n+\beta^n)^2-(\alpha^n-\beta^n)^2\\&=4(\alpha\beta)^n=4\cdot(-1)^n.\end{aligned}$$

由上式可知，当 F_n 取奇数时，$5F_n^2$ 为奇数，由$L_n^2-5F_n^2=4(-1)^n$ 可见 L_n 必为奇数，否则与右边的偶数 $4\cdot(-1)^n$ 矛盾．又因为 F_n, L_n 是奇数，故$(F_n, L_n)=1$.

同理当 F_n 为偶数时，$5F_n^2$ 为偶数，由于 $L_n^2-5F_n^2=4\cdot(-1)^n$ 可知 L_n 必为偶数，并且$(F_n^2, L_n^2)=4$，$\therefore(F_n, L_n)=2$.

如同斐波那契数列一样，鲁卡斯数列也有不少数论性质．譬如 $(L_n, L_{n+1})=1$，该性质可以由如下说明来解释：若 L_n，L_{n+1} 有公因子d，由鲁卡斯数列递推关系式 $L_{n-1}=L_{n+1}-L_n$，可见 d 也是L_{n-1}的因子，故 d 也是L_{n-1}, L_n的公因子，同理 d 也是 L_{n-2}, L_{n-1} 的公因子，以此类推，得 d 也是

L_1, L_2 的公因子，$(1,3)=1$，故 $d=1$，于是便推得鲁卡斯数列相邻两项互质.

最后我们以斐波那契数与连分数的一些关系来结束本章.

一般地我们称

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

为连分数，a_0、a_1、a_2、$\cdots$、a_n 为这个连分数的部分商. 两个连续的斐波那契数的商可以写成连分数的形式，如

$$\frac{F_5}{F_4}=1+\frac{F_3}{F_4}=1+\cfrac{1}{\cfrac{F_4}{F_3}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{F_2}{F_3}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}.$$

由上面叙述可得斐波那契数关于连分数方面的性质.

性质 6　一个有 n 个部分商的连分数，若每一个部分商都等于 1，则这个连分数为 $\frac{F_{n+1}}{F_n}$，即

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1}}}=\frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

例 10 $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1}}}}=\dfrac{m}{n}$，其中 m、n 是互质的自然数．而等式左边有 1988 条分数线，试计算 m^2+mn-n^2 的值(全苏第十四届中学生数学竞赛十年级试题)．

解 根据性质 6，可以得到

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{F_{1988}}{F_{1989}}.$$

于是 $m^2+mn-n^2=F_{1988}^2+F_{1988}F_{1989}-F_{1989}^2$

$=(F_{1988}-F_{1989})(F_{1988}+F_{1989})+F_{1988}F_{1989}$

$=F_{1988}F_{1989}-F_{1987}F_{1990}$.

由第一章性质5连续四项斐波那契数性质

$$F_{n+3}F_n-F_{n+2}F_{n+1}=(-1)^{n+1}$$

$\therefore\quad m^2+mn-n^2=(-1)^{1987}=-1$.

练　习　四

1．试证明$(F_{10m},F_{12})=1$．

2．在前 100 个斐波那契数中，求：

(1) 能被 3 整除的数的和．

(2) 能被 8 整除的个数．

3．求(F_{1990},F_{2000})．

4．k 为固定的正整数．$u_0=0$，$u_1=1$，$u_n=ku_{n-1}-u_{n-2}(n\geqslant 2)$．

试证明　对每一个 n, $u_1^3+u_2^3+\cdots+u_n^3$ 是 $u_1+u_2+\cdots+u_n$ 的倍数(第 26 届 IMO 预选题).

5. 已知$L_1=1$, $L_2=3$, $L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$是鲁卡斯数列，试证明$(L_n, F_{n+1})=1$.

6. 试证明 $5F_{5n+1}+4F_{5n}-5$ 能被 11 整除,其中 F_n 是斐波那契数.

7. 数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$, $a_2=-1$, $a_{n+2}=-a_{n+1}-2a_n$. 试证明 $2^{n+1}-7a_{n-1}^2$是整数的完全平方.

8. 数列$\{a_n\}$满足：a_1是某个自然数,而 $a_{n+1}=\left[\frac{3}{2}a_n\right]+1$, 试问　是否可以选定 a_1,使此数列的前 100000 项全是偶数，而第 100001 项为奇数?其中$[x]$表示不大于x的最大整数(德国数学竞赛试题).

第五章　递推方法的应用

由递推关系式表示数量关系的斐波那契数列在以前并没有引起多大重视和震动．随着电子计算机的广泛应用，一门新兴的数学分支学科离散数学开始逐步建立起来，这种用迭代、递推的方法来研究数量之间关系的手段才得到蓬勃的发展，斐波那契数列这个古老的数学问题才倍受人们重视．正是计算机应用的迅速普及，使用递推方法研究数量之间关系的方法提高了斐波那契数列在数学领域中的地位．本章试图对递推方法的应用作更进一步的阐述．

§5.1　在计数问题中的应用

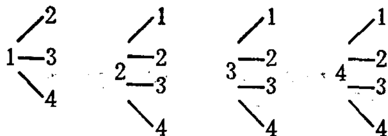
组合数学中经常需要研究按照某种规则排列的元素的个数问题．譬如斐波那契数列，它本身就是一个计数问题，而用递推关系式研究斐波那契数列，就为我们提供了一种研究计数问题的途径．

下面我们用递推方法考虑一个计数问题，并试图从中悟出一些一般思考规律：

用 1、2、3、4 四个数字组成一个 100 位数．如果不允许两个 1 紧挨在一起，那末可以组成多少个不同的 100 位数．

这是一个按一定规则排列的计数问题，如果一个一个地排，不要说 100 位数，即使是要你计算按规则排列的 10 位数

的个数也很困难。若我们借助递推的方法计数，问题便会改观，并且可以将结论进一步推广．设 a_n 表示用这四个数字按题意规定方式排成 n 位数的个数．比如，一位数有 4 个，$a_1=4$．二位数有 15 个，$a_2=15$. 数到这儿我们就发现 a_2 的计数与a_1有关系，这就为计算按规律排列的n位数的个数提供了信息．



(1) 将 a_{n-1} 个 $n-1$ 位数末尾添上 2、3 或 4，便可以得到末尾是 2、3 或4的符合规则的n位数，这样的数共有$3a_{n-1}$个.

(2) 末位是 1，那末按规则次末位不能是 1，只能是2、3或4，于是将 a_{n-2}个 $n-2$位数，后面添上 2、3 或 4，最末位再添上 1 便得到 $3a_{n-2}$ 个末位是 1 的 n 位数．根据 (1)、(2) 分析，得到

$$a_1=4,\quad a_2=15,\quad a_n=3a_{n-1}+3a_{n-2}\quad (n\geqslant 3).$$

这样就得到了 a_n 与 a_{n-1}、a_{n-2} 之间的递推关系式，有了这个关系式，一般来说通过特征方程的方法或变换的方法，就能得到 a_n 的通项公式，即比较彻底地完成了这个计数问题．按照这一思路，我们继续求 100 位数的个数。由所得递推关系式的特征方程 $x^2-3x-3=0$,

解得方程的根为 $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$.

$$\therefore\quad a_n=C_1\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^n.$$

由初始条件 $a_1=4$, $a_2=15$，解方程组

$$\begin{cases} C_1\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}+C_2\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}=4, \\ C_1\left(\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^2+C_2\left(\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^2=15. \end{cases}$$

得 $C_1=\dfrac{21+5\sqrt{21}}{42}$, $C_2=\dfrac{21-5\sqrt{21}}{42}$.

于是

$$a_n=\frac{21+5\sqrt{21}}{42}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^n+\frac{21-5\sqrt{21}}{42}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^n.$$

即按规则排列的100位数的个数为

$$a_{100}=\frac{21+5\sqrt{21}}{42}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^{100}+\frac{21-5\sqrt{21}}{42}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^{100}.$$

显然，用枚举法处理运算量很大的计数问题是麻烦的.此外如在计算第 n 个月兔子的对数、按规则排列的 n 位数的个数、切 n 刀能将西瓜切成最多的块数等这类与 n 有关系的计数时，我们引进一个数学符号 a_n，用它表示第 n 个月兔子的对数、n 位数的总数、切 n 刀西瓜最多可切成的块数等. 应该看到当 $n=1,2,3,\cdots$时，它们就分别构成了数列 $\{a_n\}$. 其次再由特殊情况入手，比如由 $n=1,2,3$ 时的个数，研究每增加一个月、增加一位数或添上一刀，前后个数发生的变化，悟出 a_n 与 a_{n-1}、a_{n-2}、$\cdots$之间的关系，并用式子来表示，得到递推关系式.然后设法求出数列的通项，这就是上面例子的解题思路，

这种解题思路通常称为用递推的方法来计数．值得提出的是研究与计算 $n=1,2,3$ 时的个数是很重要的，它不仅给出求数列通项的初始值，而且是利用"归纳"这个数学方法来获得 a_n 与 $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots$ 之间递推关系的基础．由上述分析可知，用递推方法计数的一般步骤是这样的：

第一步　引入数学记号 a_n，表示计数中与n有关的条件下元素的个数．当 $n=1,2,3,\cdots$ 时，构成数列 $\{a_n\}$．

第二步　观察并计算几个初始值 a_1, a_2, a_3 等．

第三步　找出 a_n 与 $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots$ 之间的关系，列出数列 $\{a_n\}$ 满足的递推关系式．这一步是计数的关键步骤．

第四步　求出数列 $\{a_n\}$ 的通项．

例 1　用多米诺骨牌（即形状为 1×2 的骨牌）覆盖 $2\times n$ 的棋盘．求完全覆盖棋盘的所有不同方法的种数．

这是一个计数问题．完全覆盖棋盘所有不同方法的种数与棋盘长度 n 有关系，引入记号 a_n 表示 $2\times n$ 棋盘的所有不同覆盖方法的总数，这样计数问题就转化为数列 $\{a_n\}$ 求通项的问题了．这是一种重要的思路．在这种思路指引下，就可把我们的注意力放到探求数列各项之间的递推关系上．下面就按这个想法来解决棋盘覆盖的不同种数问题．

解　记 $2\times n$ 的棋盘用多米诺骨牌完全覆盖所有不同的种数为 a_n．

显然 2×1 的棋盘，只有一种方法，故 $a_1=1$；2×2 的棋盘

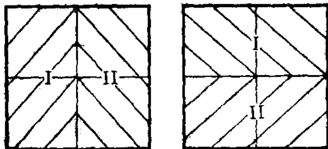


图 1　　　　图 2

为正方形．如图所示有两种不同覆盖方法，故 $a_2=2$．

然后考虑一般的情况，对 $2\times n$ 的棋盘，有两种可能情况：

(1) 当最右端为一块直放的多米诺骨牌时，剩下的棋盘为 $2\times(n-1)$，故有 a_{n-1} 种不同的完全覆盖法．即最右端为一块直放的多米诺骨牌时，$2\times n$ 的棋盘，会有 a_{n-1} 种不同的完全覆盖法．

(2) 当最右端的为两块横放的多米诺骨牌时(如图2)，剩下的棋盘为 $2\times(n-2)$，故有 a_{n-2} 种不同的完全覆盖法．而注意到最右端两块竖放(如图1)，即是(1)种所包含的情况．

$\therefore\quad a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\qquad a_1=1, a_2=2.$

显然 $2\times n$ 棋盘用多米诺骨牌覆盖的不同方法种数与斐波那契数有关．

$$a_n=F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}).$$

在有关区域划分的计数问题中，递推方法更显示了它的优越性．

例 2 一个平面内有 n 条直线．问这 n 条直线最多能把平面分成几个区域．

解 由题意可知．平面被分成的区域个数与 n 有关，故设由 n 条直线最多能将平面划分的区域数为 a_n，那末 a_{n-1} 表示 $n-1$ 条直线能将平面划分的最多区域个数．因为要将平面分成的部分最多，所以任意两条直线都不平行，且无三条直线相交一点．在这种情况下，第 n 条直线必与前 $n-1$ 条直线相交，有 $n-1$ 个交点．第 n 条直线被 $n-1$ 个交点分为 n 个部分，每一个部分将原来区域中的一块一分为二，所以在 a_{n-1} 个区域上再增加了 n 个部分，于是可得递推关系：$a_n=a_{n-1}+n$．

$a_n-a_{n-1}=n,\ a_{n-1}-a_{n-2}=n-1,\ \cdots,$

$a_2-a_1=2$.

把上面 $n-1$ 个等式相加，并注意 $a_1=2$，

得 $$a_n=\frac{1}{2}n(n+1)+1.$$

用递推方法处理计数问题时，注意力应该集中在求 a_n，a_{n-1}，a_{n-2}，… 之间的关系上．如例2便是探求增加了一条直线以后会产生的数量变化来探求 a_n 与 a_{n-1} 之间的联系，这是关键步骤．用同样想法还可以把问题作推广，如：

空间有 n 个平面，问这 n 个平面最多能将空间划分成多少个区域？

由题意可知，空间被分成的区域个数与 n 有关，故设由 n 个平面最多能将空间划分的区域数为 a_n，那末 a_{n-1} 表示$n-1$ 个平面能将空间划分的最多区域个数．因为要将空间分割的区域个数最多，所以其中任意两个平面都不平行，且三个平面都不共线，所得平面的交线均无三线共点．当平面个数由 $n-1$ 个增加到 n 个时，新增加的平面与原 $n-1$ 个平面都相交，有 $n-1$ 条交线，由例2，这 $n-1$ 条交线将新增加的第 n 个平面，分成 $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 块．由于每增加一块平面区域，都使空间增加一个部分，所以从 $n-1$ 个平面增加到第 n 个平面，使空间增加 $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 个部分，于是得递推关系式：

$$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1,$$

$$a_{n-1}-a_{n-2}=\frac{1}{2}(n-1)^2-\frac{1}{2}(n-1)+1,\cdots,$$

$$a_2-a_1=\frac{1}{2}\cdot 2^2-\frac{1}{2}\cdot 2+1.$$

把上面 $n-1$ 个等式相加，得

$$a_n-a_1=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}i+(n-1), \quad \because \quad a_1=2,$$

得 $$a_n=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}i+(n-1)+2.$$

$$\therefore \quad a_n=\frac{n^3+5n+6}{6}.$$

即 n 个平面最多可以将空间分成 $\frac{n^3+5n+6}{6}$ 个区域.

例 3 用红、白、蓝、黑四色将 $1\times n$棋盘上的方格涂色. 若没有两个相邻的方格都涂红色，求所有不同涂色的种数.

解 由题意可知，不同涂色方法的种数与棋盘的格子数n有关，故用红、白、蓝、黑四色将 $1\times n$ 棋盘涂色，没有两个相邻方格为红色的所有不同种数为 a_n.

当然我们可以用上述方法寻求递推关系，然而如果用1、2、3、4 四个数字分别表示红、白、蓝、黑四种颜色，用 1、2、3、4 四个数字来填 $1\times n$ 棋盘，问题马上转化为在本章开始提出的用1、2、3、4四个数字组成没有两个1紧挨在一起的不同的 n 位数的种数问题. 把实际问题抽象成一个等价的计数问题便可以简化考虑问题的过程，这种等价问题的方法，也是数学中常用的方法.

由上面分析 $1\times n$ 棋盘按规则的所有不同涂色的种数满足 $a_1=4$, $a_2=15$, $a_n=3a_{n-1}+3a_{n-2}(n>2)$. 并由前面讨论所得，用红、白、蓝、黑四色将 $1\times n$ 棋盘的方格涂色，没有两个相邻的方格涂红色所有不同涂色种数为

$$a_n=\frac{21+5\sqrt{21}}{42}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^n+\frac{21-5\sqrt{21}}{42}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^n.$$

§5.2 在研究数的性质中的应用

在得到比内公式 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ 时，我们可能想到过，数列的通项是由含根号的式子表示的，但是不论 n 取何值，通项的值都取整数．这个性质向我们提供了研究某些含根号的数是整数的途径.

我们可以倒过来看斐波那契数列：给定一个数列的通项公式：$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ $n=1,\ 2,\cdots$. 要证明数列的每一项都是整数．我们只要设法求出 $\{a_n\}$ 的递推关系式，因为它的递推关系 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 是二阶线性递推式，并且 $a_1=a_2=1$，按递推关系便可推得数列的每一项都取整数．以上就是证明含根号的数是整数的一种思路．通过下面几个例题你一定会感到在证明某些通项用分式形式、根式形式或三角函数形式给出的数列是整数列时，是较方便的.

例 4 已知 数列 $\{a_n\}$：$a_1=a_2=a_3=1$,

$$a_{n+1}=\frac{1+a_na_{n-1}}{a_{n-2}}\qquad n=3,4,\cdots.$$

试证明 数列 $\{a_n\}$ 每一项均是整数.

证明 数列 $\{a_n\}$ 的递推关系由分式形式给定，现经分析它还可以由线性递推形式来表示.

令数列 $\{b_n\}$：$b_1=b_2=b_3=1,b_4=2$.

$$b_n=4b_{n-2}-b_{n-4}.$$

于是 $b_{n+1}b_{n-2}-b_nb_{n-1}=(4b_{n-1}-b_{n-3})b_{n-2}$

$$-(4b_{n-2}-b_{n-4})b_{n-1}$$

$$=b_{n-1}b_{n-4}-b_{n-2}b_{n-3}.$$

根据上面关系式可知

当 n 是奇数时，

$$b_{n+1}b_{n-2}-b_nb_{n-1}=b_{n-1}b_{n-4}-b_{n-2}b_{n-3}=b_4b_1-b_3b_2=1.$$

当 n 是偶数时，

$$b_{n+1}b_{n-2}-b_nb_{n-1}=b_{n-1}b_{n-4}-b_{n-2}b_{n-3}=b_5b_2-b_4b_3=1.$$

由此可得 $b_{n+1}b_{n-2}-b_nb_{n-1}=1$，经变形，有

$$b_{n+1}=\frac{1+b_nb_{n-1}}{b_{n-2}}$$

于是可以推得 $\{a_n\}=\{b_n\}$，

由 $b_1=b_2=b_3=1, b_4=2$ 便可得 $\{b_n\}$ 是整数数列，即 a_n 是整数．

本题还可以考虑更一般的情况：

设数列 $\{a_n\}$: $a_1=a_2=1, a_3=p$,

$a_{n+1}=\dfrac{k+a_na_{n-1}}{a_{n-2}}$，其中 k, p 是正整数，$(k,p)=1$，

则 a_n 是整数的充要条件为 $k=rp-1$，r 是整数.

证明 充分性，由题意，$a_{n+1}a_{n-2}=k+a_na_{n-1}$，$a_na_{n-3}=k+a_{n-1}a_{n-2}$. 两式相减，得

$$a_{n+1}a_{n-2}+a_{n-1}a_{n-2}=a_na_{n-1}+a_na_{n-3},$$

$\therefore \dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-3}}{a_{n-2}}$ 由此递推关系，可得

当 n 为偶数时，$\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{a_3+a_1}{a_2}=p+1$；

当 n 为奇数时，$\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_4+a_2}{a_3}$

$$=\frac{k+p+1}{p}=r+1,$$

由上面两种情况可知$\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}$是整数，根据$\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}$取整数可推得若 a_{n-1}、a_n 是整数，则 a_{n+1} 必取整数．而 $a_1=a_2=1$，$a_3=p$ 都是整数，故命题成立．

必要性，$a_5=k+(k+p)p$，

$$a_6=\frac{\{k+(k+p)[k+p(k+p)]\}}{p},$$

∵ a_6 是 $\frac{k+k^2+mp}{p}$ 的形式的数，其中 $m=(k^2+2kp+k+1)$ 是整数．由于 a_n 是整数，

∴ $p|k(k+1)$，若 $p=1$，$k=r-1$ 属 $rp-1$ 形式；若$p>1$，$(p,k)=1$，由 $p|k(k+1)$ 得

$$p|(k+1),\quad \therefore k=rp-1.$$

例 5 设 x_1、x_2、x_3、…、x_n、…是非零实数数列，满足

$$x_n=\frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}\quad n=3,4,\cdots.$$

试建立 x_1、x_2 的充要条件，使对 n 的无穷多个值，x_n 是整数（第 40 届普特南数学竞赛 A、3）．

解 将 $x_n=\frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}$ 两边取倒数，

$$\frac{1}{x_n}=\frac{2}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-2}},$$

$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-2}},$$

由上述递推关系，得 $\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}$,

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k-1}}\right)=(n-1)\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right),$$

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_1}+(n-1)\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)$$ 经变换整理，得

$$x_n=\frac{x_1x_2}{(x_1-x_2)n+(2x_2-x_1)},$$

令 $\frac{x_1}{x_2}=a$, $x_n=\frac{x_1}{(a-1)n+(2-a)}$ (1)

当 $a\neq1$ 时，(1) 式的分母绝对值随 n 增大而无限增大，x_1 固定，所以 x_n 不可能对无限多个 n 取整数.

当 $a=1$ 时，$x_1=x_2$，可以推得 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，故当x_1 取整数时，对一切 n 的值 x_n 均取整数.

综上所述对无限多个 n，使 x_n 取 整数 的条 件是 $x_1=x_2=m, m\in Z$.

在处理说明某些三角函数取整数或有理数时，递推方法的应用亦是很有趣的.

例 6 若 $\sin\theta+\cos\theta$ 是有理数，

试证明 $\sin^n\theta+\cos^n\theta$ 也是有理数.

证明 令 $a_n=\sin^n\theta+\cos^n\theta$，设法寻找 a_n、a_{n-1}、a_{n-2}、$\cdots$ 之间的递推关系.

显然 $a_n=\sin^n\theta+\cos^n\theta$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^{n-1}\theta+\cos^{n-1}\theta)$$
$$-\sin\theta\cos\theta(\sin^{n-2}\theta+\cos^{n-2}\theta).$$

于是得到 a_n、a_{n-1} 和 a_{n-2} 之间的递推关系：

$$a_n=(\sin\theta+\cos\theta)a_{n-1}+\sin\theta\cos\theta a_{n-2}\quad(n\geqslant3).$$

$\because$ $a_1=\sin\theta+\cos\theta$ 是有理数，

$a_2=\sin^2\theta+\cos^2\theta$ 是有理数.

由递推关系式 $a_n=(\sin\theta+\cos\theta)a_{n-1}+\sin\theta\cos\theta a_{n-2}$ 可知，a_n 是有理数.

$\therefore$ $\sin^n\theta+\cos^n\theta$ 是有理数.

对于形如 $a_n=Ax_1^n+Bx_2^n$ 的数列，即：$a_1=Ax_1+Bx_2$、$a_2=Ax_1^2+Bx_2^2$、…，必满足递推关系式

$$a_{n+2}=(x_1+x_2)a_{n+1}-x_1x_2a_n.$$

这是因为

$$Ax_1^{n+2}+Bx_2^{n+2}=(x_1+x_2)(Ax_1^{n+1}+Bx_2^{n+1})\\-x_1x_2(Ax_1^n+Bx_2^n).$$

例 6 便是上述递推关系中 $A=B=1, x_1=\sin\theta, x_2=\cos\theta$ 时的特殊情况.

更一般地，对于形如 $a_n=Ax_1^n+Bx_2^n+Cx_3^n$ 的数列，必满足递推关系：

$$a_{n+3}=(x_1+x_2+x_3)a_{n+2}-(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)a_{n+1}\\+3x_1x_2x_3a_n.$$

上面递推关系是很容易直接检验的. 利用这些递推关系式，在某些给定的条件下证明如 $Ax_1^n+Bx_2^n+Cx_3^n$ 这类数满足某些性质是比较方便的.

例 7 已知 $A_n=\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)^{2n}+\left(2\sin\frac{2\pi}{7}\right)^{2n}$

$$+\left(2\sin\frac{3\pi}{7}\right)^{n}\quad n=1,2,\cdots,$$

试证明 $\{A_n\}$ 满足递推关系 $A_{n+3}=7A_{n+2}-14A_{n+1}+7A_n$，且 A_n 是整数.

证明 令 $x_1=\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)^2$，　$x_2=\left(2\sin\frac{2\pi}{7}\right)^2$，

$$x_3=\left(2\sin\frac{3\pi}{7}\right)^2.$$

现讨论 $x_i^3-7x_i^2+14x_i-7\quad i=1,2,3$ 的结果，

$$\begin{aligned}
&x_i^3-7x_i^2+14x_i-7\\
&=\left(2\sin\frac{i\pi}{7}\right)^6-7\left(2\sin\frac{i\pi}{7}\right)^4+14\left(2\sin\frac{i\pi}{7}\right)^2-7\\
&=\left(2-2\cos\frac{2i\pi}{7}\right)^3-7\left(2-2\cos\frac{2i\pi}{7}\right)^2\\
&\quad+14\left(2-2\cos\frac{2i\pi}{7}\right)-7\\
&=8\left(1-3\cos\frac{2i\pi}{7}+3\cos^2\frac{2i\pi}{7}-\cos^3\frac{2i\pi}{7}\right)\\
&\quad-28\left(1-2\cos\frac{2i\pi}{7}+\cos^2\frac{2i\pi}{7}\right)\\
&\quad+14\left(2-2\cos\frac{2i\pi}{7}\right)-7\\
&=1+4\cos\frac{2i\pi}{7}-4\cos^2\frac{2i\pi}{7}-8\cos^3\frac{2i\pi}{7}\\
&=-\frac{\left(\sin\frac{6i\pi}{7}+\sin\frac{8i\pi}{7}\right)}{\sin\frac{2i\pi}{7}}=0.
\end{aligned}$$

∴ x_1、x_2、x_3 是 $x^3-7x^2+14x-7=0$ 的三个实根．故

$$x_1^{n+3}=7x_1^{n+2}-14x_1^{n+1}+7x_1^n,$$
$$x_2^{n+3}=7x_2^{n+2}-14x_2^{n+1}+7x_2^n,$$
$$x_3^{n+3}=7x_3^{n+2}-14x_3^{n+1}+7x_3^n.$$

把上面三式相加，得 $\{A_n\}$ 满足递推关系：

$$A_{n+3}=7A_{n+2}-14A_{n+1}+A_n.$$

又 $A_0=\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)^0+\left(2\sin\frac{2\pi}{7}\right)^0+\left(2\sin\frac{3\pi}{7}\right)^0=3,$

$$A_1=\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(2\sin\frac{2\pi}{7}\right)^2+\left(2\sin\frac{3\pi}{7}\right)^2$$

$$=x_1+x_2+x_3=7.$$

$$A_2=\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)^4+\left(2\sin\frac{2\pi}{7}\right)^4+\left(2\sin\frac{3\pi}{7}\right)^4$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=21.$$

由递推关系便可知道

$$A_n=\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)^{2n}+\left(2\sin\frac{2\pi}{7}\right)^{2n}+\left(2\sin\frac{3\pi}{7}\right)^{2n}$$

$$n=1,2,\cdots$$

都是整数。

由比内公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

无论 n 取何自然数，F_n 都取自然数这一事实，势必会使我们联想到：

形如 $a_n=\frac{1}{\sqrt{M}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{M}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{M}}{2}\right)^n\right]$的数，如果 M 取自然数，a_n 会不会取整数？如果 a_n 不一定是整数，那末对 M 附加哪些条件，就能保证 a_n 取整数？为了探索这个问题，用递推关系可作如下思考，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{M}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{M}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{M}}{2}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{M}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{M}}{2}\Big)^{n-2}\Big(\frac{1+\sqrt{M}}{2}\Big)^{2}$$

$$-\Big(\frac{1-\sqrt{M}}{2}\Big)^{n-2}\Big(\frac{1-\sqrt{M}}{2}\Big)^{2}\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{M}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{M}}{2}\Big)^{n-2}\ \frac{1+2\sqrt{M}+M}{4}$$

$$-\Big(\frac{1-\sqrt{M}}{2}\Big)^{n-2}\ \frac{1-2\sqrt{M}+M}{4}\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{M}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{M}}{2}\Big)^{n-2}\Big(\frac{1+\sqrt{M}}{2}+\frac{M-1}{4}\Big)$$

$$-\Big(\frac{1-\sqrt{M}}{2}\Big)^{n-2}\Big(\frac{1-\sqrt{M}}{2}+\frac{M-1}{4}\Big)\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{M}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{M}}{2}\Big)^{n-1}-\Big(\frac{1-\sqrt{M}}{2}\Big)^{n-1}\Big]$$

$$+\frac{M-1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{M}}{2}\Big)^{n-2}$$

$$-\Big(\frac{1-\sqrt{M}}{2}\Big)^{n-2}\Big]$$

$$=a_{n-1}+\frac{M-1}{4}\ a_{n-2}.$$

于是就得递推关系式 $a_n=a_{n-1}+\frac{M-1}{4}\ a_{n-2}\quad(n>2)$.
再把 $n=1,2$ 分别代入

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{M}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{M}}{2}\Big)^{n}-\Big(\frac{1-\sqrt{M}}{2}\Big)^{n}\Big]$$

内，有 $a_1=1, a_2=1$. 这样就可以得到如下结论：(1) 当 M 取

正有理数时，a_n 均取到正有理数．(2) 当 $M=4k+1, k\in N$ 时，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1, a_n=a_{n-1}+ka_{n-2}(n>2)$．所以 $\{a_n\}$ 的每一项都是自然数．显然比内公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

正是 $k=1$ 时的情况．

顺便再考察数列 $\{u_n\}$ 的整数性质：

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n\right]\quad n=1,2,\cdots.$$

$$\frac{u_n}{2^n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

$$\therefore\quad \frac{u_n}{2^n}=F_n,$$

而斐波那契数均是自然数，所以 u_n 也都是自然数，并且数列 $\{u_n\}$ 有整除性：2^n 能够整除 u_n．这样我们就推得形如

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n\right]$$

的数都是 2^n 的整数倍．更进一步说，已经知道

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{M}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{M}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{M}}{2}\right)^n\right]$$

当 $M=4k+1$，$k\in N$ 时，a_n 均取自然数，同理亦可以推得形如

$$\frac{1}{\sqrt{M}}\left[(1+\sqrt{M})^n-(1-\sqrt{M})^n\right]$$

的数均是自然数，并且都能被2^n整除，其中只要满足$M=4k+$

$l,k\in N$ 即可.

对上面结论还可以作进一步的推广，用递推的方法可以证明满足

$$A_n=R\cdot\left[\left(\frac{P+\sqrt{M}}{2}\right)^n-\left(\frac{P-\sqrt{M}}{2}\right)^2\right]$$

的数列 $\{A_n\}$，它也满足递推关系式

$$A_n=PA_{n-1}+\frac{M-P^2}{4}A_{n-2},\quad n>2.$$

当 $n=1,2$ 时，$A_1=P\sqrt{M}$，$A_2=RP\sqrt{M}$. 所以如果在 P、$M\in N$ 时，(i) 取 $R=K\sqrt{M}$，$K\in N$，则能保证数列 $\{A_n\}$ 的每一项都取有理数. (ii) 取 $R=K\sqrt{M}$，$M=P^2+4L$，K，$L\in N$ 时，则能保证数列 $\{A_n\}$ 的每一项都取自然数. 并且在同样的条件下形如 $R[(P+\sqrt{M})^n-(P-\sqrt{M})^n]$ 的数亦都是自然数，同时都能被 2^n 整除.

§5.3　在求值问题中的应用

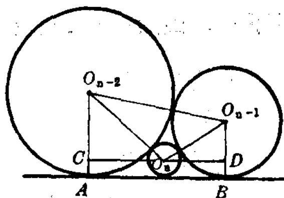
计算满足某些条件的一列数：$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 中的某一项，比如 a_{100} 时，凭借经验一般不会一个一个地去计算，而是马上会想到使用递推方法这个法宝. 这种计算方法在计算机被广泛应用的今天，更有其重要的意义. 下面先看一个例子.

例 8　两个半径都为 1 的圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 外切，直线 l 是两圆的外公切线，作 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 和直线 l 相切；然后作 $\odot O_4$ 与 $\odot O_2$、$\odot O_3$ 和直线 l 相切；…，作 $\odot O_{10}$ 与 $\odot O_8$、$\odot O_9$ 和直线 l 相切，求 $\odot O_{10}$ 的半径.

解　显然按次序分别求出 $\odot O_3$、$\odot O_4$、…、直到 $\odot O_9$ 的半径的做法是不足取的. 这种求值的问题一般是研究 $\odot O_n$ 与 $\odot O_{n-1}$、$\odot O_{n-2}$ 的半径之间的递推关系，然后利用递推关系来

求值.

如图，A、B 分别为 $\odot O_{n-1}$，$\odot O_{n-2}$ 与 l 的切点，过 O_n 作 $CD \parallel AB$，交 $O_{n-1}B$、$O_{n-2}A$ 于 D、C 两点。



故 $AB=\sqrt{(r_{n-2}+r_{n-1})^2-(r_{n-2}-r_{n-1})^2}$,

$\because$ $DO_n+CO_n=AB.$

$$\therefore \sqrt{(r_{n-1}+r_n)^2-(r_{n-1}-r_n)^2}+\sqrt{(r_{n-2}+r_n)^2-(r_{n-2}-r_n)^2}=\sqrt{(r_{n-2}+r_{n-1})^2-(r_{n-2}-r_{n-1})^2},$$

即 $\sqrt{r_n r_{n-1}}+\sqrt{r_n r_{n-2}}=\sqrt{r_{n-1} r_{n-2}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n-2}}}+\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}=\frac{1}{\sqrt{r_n}}.$$

令 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$，便有 $a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n>2)$.

故满足条件的圆的半径的算术平方根的倒数构成斐波那契数列，很容易求得

$$r_{10}=\frac{1}{F_{10}^2}=\frac{1}{55^2}.$$

通过例 8，我们可以看出，求符合某种条件的一列数值中的某一项，有时不必要逐一地把每一项求出来，如果我们能想办法借助条件求出第 n 项与相邻项的关系，导得递推关系式后，便能顺利地求出数列中的任意一项，这就是递推方法在求

值问题中的应用价值.

例 9 在一次体育比赛中 n天颁发了 m 个奖章，第一天颁发一个加上剩余的 $(m-1)$ 个的 $\frac{1}{7}$. 第二天颁发二个加上剩余的$\frac{1}{7}$;如此进行下去，最后一天，在第 n 天刚好发 n 个奖章，问：比赛了几天，发了几个奖章？

（第 9 届IMO 第6题）

解 设 第 i 天颁发 S_i 个奖章.

那末第 $k(k\leqslant n)$ 天发的奖章数应该是发出 k 个，再发剩下奖章总数的 $\frac{1}{7}$. 而剩下奖章数目应该是总数 m. 扣去前面 $(k-1)$ 天发去的奖章数，再扣去第 k 天发出的 k 个. 所以

$$S_k=k+\frac{1}{7}\left[m-\sum_{i=1}^{k-1}S_i-k\right].$$

$$S_n=n,\quad S_1=1+\frac{1}{7}\ (m-1).$$

$$S_k=\left[(k-1)+\frac{1}{7}\left(m-\sum_{i=1}^{k-2}S_i-(k-1)\right)\right]-\frac{1}{7}S_{k-1}+\frac{6}{7},$$

$$\therefore\quad S_k=S_{k-1}-\frac{1}{7}S_{k-1}+\frac{6}{7},$$

$$S_k-6=\frac{6}{7}(S_{k-1}-6),$$

得到第 k 天与第 $k-1$ 天所发奖章的递推关系后，便有

$$S_n-6=\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}(S_1-6)$$

$$=\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{7}(m-1)-5\right]$$

$$S_n=\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{7}(m-1)-5\right]+6,$$

$$S_1+S_2+\cdots+S_n$$

$$=6n+\left[\frac{1}{7}(m-1)-5\right]\frac{1-\left(\frac{6}{7}\right)^n}{1-\frac{6}{7}}$$

$$m=6n+(m-36)\left[1-\left(\frac{6}{7}\right)^n\right],$$

$$(m-36)\left(\frac{6}{7}\right)^n=6n-36,$$

$$m\left(\frac{6}{7}\right)^n=6n-36+36\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n,$$

$$m=\frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}+36.$$

$$\because\quad 6^n=(1+5)^n>1+5n+\frac{25}{2}n(n-1)$$

$$=(6n-36)+\frac{1}{2}[25n^2-27n+74]>6(n-6).$$

$$6^{n-1}>(n-6).$$

m、n 都是自然数，7^n、6^{n-1} 互质，并且 $(n-6)<6^{n-1}$.

$$\therefore\quad 0\leqslant\frac{|n-6|}{6^{n-1}}<1.$$

由此可见使 $m=\dfrac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}+36$ 成立，只有 $n=6$，$m=36$.

∴ 共进行 6 天比赛，颁发 36 只奖章.

例 10 确定 m^2+n^2 的最大值，其中 m、n 为整数，且 m，$n\in\{1,2,\cdots,1981\}$，$(n^2-mn-m^2)^2=1$.（第 22 届 IMO 第 3 题.）

解 设 (m,n) 为 $(n^2-mn-m^2)^2=1$ 的一组解，其中 m，

$n \in \{1,2,\cdots,1981\}$. 显然 $(1,1)$、$(1,2)$ 都是满足不定方程 $n^2-mn-m^2=\pm 1$ 的解.

$\because$ $n^2=mn+m^2\pm 1 \geqslant m^2$, $\therefore$ $n \geqslant m$, 仅当 $m=n=1$ 时等号成立.

由于
$$\begin{aligned}(n^2-mn-m^2)^2&=[(n-m)^2+m(n-m)-m^2]^2\\&=[m^2-m(n-m)-(n-m)^2]^2.\end{aligned}$$

$\therefore$ 如果 (m,n) 是方程的一组解, 那末 $[(n-m), m]$ 也是它的一组解, 依次类推, $[m-(n-m),(n-m)]$ 也是方程的一组解, 把 (m,n) 记作 $[F(k), G(s)]$, 把 $[(n-m), m]$ 记作 $[F(K-1),G(S-1)]$, $\cdots$ 不难发现

$$F(k)=F(k-1)+F(k-2),$$
$$G(s)=G(s-1)+G(s-2).$$

$(1,1)$, $(1,2)$ 是满足方程的解, 因此满足方程的解应是斐波那契数. $F_{17}=2584>1981>F_{16}=1597$

$\therefore$ m^2+n^2 的最大值为 $F_{15}^2+F_{16}^2=987^2+1597^2=3524578$.

练 习 五

1. 设圆周上有 n 个点,连接 n 个点中的任意两点所得的弦,最多可以将圆分成多少区域?
2. 通过球的中心作 n 个平面最多可以将球面分成多少区域?
3. 平面内有 m 条直线经过 A 点, n 条直线经过 B 点. m 条直线中没有一条直线与 n 条直线中的某条平行. 求 $m+n$ 条直线可以将平面分成多少区域?
4. 将一枚硬币接连掷 n 次,求在理想的情况下连续有两次正面朝上的概率.
5. 已知 $a+b+c=0$,证明

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3};$$

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^5+b^5+c^5}{5}.$$

6. 已知 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=1$,试证明

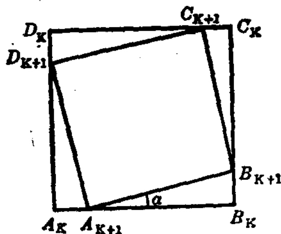
$$\sin^n\theta+\cos^n\theta=1, n\in N.$$

7. 试证明$\left[\frac{(3+\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}\right]$是 2^n 的整数倍,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

8. 试证明大于 $(\sqrt{3}+1)^{2n}$ 的下一个整数能被 2^{n+1} 除尽(第6届普特南竞赛试题 $B.6$).

9. 据说印度有个神话,一古寺内有三个桌子,甲桌上有64个大小不一的金属圆片,套在一根垂直的钉子上,最大的在下面形成一个下大上小的塔. 规定每次只许移动最上面一片,而且不允许大金片放在小金片上,为了将甲桌上的金片移到丙桌上,至少需移动多少次?

10. 在边长为 a 的正方形 $ABCD$ 上依次作内接正方形 $A_iB_iC_iD_i(i=1,2,\cdots)$,使得内接正方形一边与前一个正方形一边夹角为 α(如图). 求第 n 个内接正方形面积.



11. 一个容器可盛水10公斤,第一次倒掉$\frac{1}{3}$,然后注入1公斤纯酒精,第二次倒掉$\frac{1}{3}$,然后注入$\frac{1}{2}$公斤纯酒精;以后逐次倒掉$\frac{1}{3}$,然后注入上次注入的$\frac{1}{2}$,问 n 次操作后,容器内酒精的浓度是多少?当 n 无穷增大时,容器内的浓度变化如何?

12. A、E 是一个正八角形一组相对顶点，一个青蛙，从 A 点开始跳跃，且正八角形每个除 E 外的顶点都可向相邻两个邻点的任何一个跳动，当青蛙跳到 E 后，就停止跳动．今用 a_n 表示从 A 点出发经过 n 步后跳到 E 点的所有不同跳法种数．试证明

$$a_n=\begin{cases}0 & n\text{ 为奇数，}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[(2+\sqrt{2})^{m-1}+(2-\sqrt{2})^{m-1}\right] & n=2m,m\in N.\end{cases}$$

（第21届 IMO 试题6．）

部分答案与提示

练 习 一

6．注意$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$中，由于$F_n$是自然数，且

$$0<\frac{1}{\sqrt{5}}(-\beta^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n<1,$$

便得结论．

由本题可知计算F_n的值，有时只需计算$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$的整数部分，用本题结论便行了．

7．由本章例2的推广，易知$\{L_{n+1}-\alpha L_n\}$、$\{L_{n+1}-\beta L_n\}$都是等比数列．

$$L_{n+1}-\alpha L_n=\beta^{n-1}(L_2-\alpha L_1)=\beta^{n-1}(2+\beta),$$
$$L_{n+1}-\beta L_n=\alpha^{n-1}(L_2-\beta L_1)=\alpha^{n-1}(2+\alpha).$$

两式相减，得

$$(\beta-\alpha)L_n=2(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})+(\beta^n-\alpha^n)$$

$$L_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}+\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[-(\alpha-\beta)(\alpha^n+\beta^n)+\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}+\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta)(\alpha^n+\beta^n)$$

注意$\alpha-\beta=\sqrt{5}$，$\alpha\beta=-1$，故

$$L_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[-\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}-\alpha\beta^n+\alpha^n\beta+\alpha^{n-1}$$

$$-\beta^{n-1}+\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}]+\alpha^n+\beta^n=\alpha^n+\beta^n.$$

同上可证 (ii).

练 习 二

1. (i) $a_n=7+3^n$;

(ii) $a_n=2^{n-1}+3(n-1)\cdot 2^{n-2}$;

(iii) $a_n=2^{\frac{n-1}{2}}\left[\cos\frac{(n-1)\pi}{4}+2\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right].$

2. (i) 注意 $x_{n+1}=5x_n+2\cdot 3^{n+1}-4$, $x_n=5x_{n-1}+2\cdot 3^n-4$再把两式相减,得$(x_{n+1}-x_n)=5(x_n-x_{n-1})+4\cdot 3^n$. 其中令 $b_n=x_n-x_{n-1}$,变换即可得 $x_n=3\cdot 5^n-3^{n+1}+1$.

(ii) 由 $f(x)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}+x}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}x}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\operatorname{arctg}x\right)$.

$\operatorname{arc\,tg} f(x_n)=\frac{\pi}{6}+\operatorname{arc\,tg}f(x_{n-1})$, 令 $\operatorname{arctg}f(x_n)=b_n$,即得 $\{b_n\}$ 为等差数列,解得 $x_{1981}=1982$.

(iii) 令 $b_n\cdot(n+1)!=x_n$,

$$(k+1)!b_k=k[k!b_{k-1}+(k-1)!b_{k-2}],$$

$$(k+1)b_k=kb_{k-1}+b_{k-2},$$

$$(k+1)(b_k-b_{k-1})=-(b_{k-1}-b_{k-2}),$$

$$\frac{b_k-b_{k-1}}{b_{k-1}-b_{k-2}}=-\frac{1}{k+1},$$

由此得

$$b_k-b_{k-1}=(b_2-b_1)\frac{(-1)^{k-2}}{(k+1)!}\cdot 3!,$$

$$b_n=\sum_{k=2}^{n}(b_k-b_{k-1})+b_1=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

$$\therefore\quad x_n=(n+1)!\,b_n=(n+1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$$

(iv) 令 $a_n=2\cos\theta_n,0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

$$2\cos\theta_{n+1}=a_{n+1}=\sqrt{2+2\cos\theta_n}=2\cos\frac{\theta_n}{2}.$$

$$\theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2},$$

$\{\theta_n\}$ 是等比数列，

$$\theta_n=\theta_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\quad\therefore\quad a_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

3. $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$，其中

$$\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\quad\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\frac{F_{4a}}{F_{2a}}-\left(\frac{F_{4a}}{F_{2a}}\right)^2+2=\frac{\alpha^{4a}-\beta^{4a}}{\alpha^{2a}-\beta^{2a}}-\left(\frac{\alpha^{4a}-\beta^{4a}}{\alpha^{2a}-\beta^{2a}}\right)^2+2$$

$$=\alpha^{2a}+\beta^{2a}-(\alpha^{a}+\beta^{a})+2=-2(\alpha\beta)^{a}+2=0.$$

其中 $a=2^n$，$\therefore$ $\frac{F_{2^{n+1}}}{F_{2^n}}$满足$a_{n+1}=a_n^2-2$，与$\{a_n\}$有相同递推关系，且 $a_1=3=\frac{F_4}{2}$，命题成立.

4. 用数学归纳法.

5. $a_n=\frac{1}{3^n+1}$. 其中只要令$b_n=\frac{1}{a_n}$.

6．令 $a_n=b_n+K\cdot 2^n$，(K 为待定系数.)由 $2(b_{n+2}+K\cdot 2^{n+2})+(b_{n+1}+K\cdot 2^{n+1})-3(b_n+K\cdot 2^n)+2^n=0$，

即 $2b_{n+2}+b_{n+1}-3b_n+2^n(8K+2K-3K+1)=0$，

使 $8K+2K-3K+1=0, K=-\frac{1}{7}$.

于是，有 $2b_{n+2}+b_{n+1}-3b_n=0$. 由特征方程法，解得

$$b_n=\frac{14}{5}-\frac{18}{35}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{14}{5}-\frac{18}{35}\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{7}\cdot 2^n.$$

注意，一般地，对由递推关系 $\alpha a_{n+2}+\beta a_{n+1}+\gamma a_n+pq^n=0$ 给出的数列，其中 α、β、γ、p、q 是常数，可以作代换 $a_n=b_n+Kq^n$. K 为待定系数，可由第 6 题同样方法解得，

$$K=-\frac{pq}{\alpha q^2+\beta q+\gamma}.$$

7．由 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+1+\frac{1}{a_n-1}\right)$，有

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}\left(a_n-1+\frac{1}{a_n-1}\right),$$

令 $b_n=a_n-1$，得 $b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{1}{b_n}\right)$.

取 $C_n=\frac{b_n-1}{b_n+1}$，有 $C_{n+1}=C_n^2$，两边取对数，

$\lg C_{n+1}=2\lg C_n$，$\{\lg C_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，

$$\therefore\quad C_n=C_1^{2^{n-1}}, C_1=\frac{b_1-1}{b_1+1}=\frac{a_1-1-1}{a_1-1+1}$$

$$\therefore\quad C_1=\frac{a-2}{a}，得 C_n=\left(1-\frac{2}{a}\right)^{2^{n-1}}.$$

于是 $$a_n=2\left[1-\left(1-\frac{2}{a}\right)^{2^{n-1}}\right]^{-1}.$$

注意，一般地 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\alpha}{a_n}\right)$ 这种递推关系式给出的数列，作代换 $b_n=\frac{a_n-\lambda_1}{a_n-\lambda_2}$，其中 λ_1,λ_2 为方程

$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\alpha}{x}\right)$$

的解。

8. $\because\quad \frac{a_{n+1}-a_n}{1+a_{n+1}a_n}=\frac{1}{2n^2}$，令 $a_n=\operatorname{tg}b_n$.

$\left(\text{因为} \frac{a_{n+1}-a_n}{1+a_{n+1}a_n} \text{ 与 } \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \text{形状有相似之处}\right).$

$$b_1=\operatorname{arctg}a_1,\quad \operatorname{tg}(b_{n+1}-b_n)=\frac{1}{2n^2},$$

$$b_{n+1}-b_n=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n^2},$$

$$\because\quad \frac{1}{2n^2}=\frac{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}}{1+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}},$$

有 $$\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n-1}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n+1}.$$

于是可得

$$b=\operatorname{arc\,tg}a_1-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n-1}+a_1=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n-1},$$

$$\therefore\quad a_n=\operatorname{tg}b_n=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n-1}\right)=2n-1.$$

练 习 三

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 5}+\cdots+\frac{F_{n+1}}{F_nF_{n+2}}$

$$=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{5-2}{2\cdot 5}+\cdots+\frac{F_{n+2}-F_n}{F_nF_{n+2}}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{F_n}-\frac{1}{F_{n+2}}\right)$$

$$=2-\frac{F_n}{F_{n+1}F_{n+2}}.$$

6. 由比内公式

$$F_5+F_{10}+\cdots+F_{5n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\alpha^5+\alpha^{10}+\cdots+\alpha^{5n})-(\beta^5+\beta^{10}+\cdots+\beta^{5n})\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\alpha^5(1-\alpha^{5n})}{1-\alpha^5}-\frac{\beta^5(1-\beta^{5n})}{1-\beta^5}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[-\frac{1-\alpha^{5n}}{\beta^5+1}+\frac{1-\beta^{5n}}{\alpha^5+1}\right],$$

$$\alpha^5=\alpha^2\cdot\alpha^2\cdot\alpha=(1+\alpha)\cdot(1+\alpha)\cdot\alpha=5\alpha+3;\quad \beta^5=5\beta+3.$$

$$\therefore\ 原式=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\alpha^{5n}-1}{4+5\beta}+\frac{1-\beta^{5n}}{4+5\alpha}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(\alpha^{5n}-1)(4+5\alpha)+(1-\beta^{5n})(4+5\beta)}{(4+5\beta)(4+5\alpha)}\right]$$

$$=\frac{1}{11}\left[5F_{5n+1}+4F_{5n}-5\right].$$

7. 首先 $a_n \neq 0 (n=1, 2, \cdots)$，否则 $a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=0$，矛盾。

$\frac{1}{a_n}=2n-1+\frac{1}{a_{n-1}}$，令 $b_n=\frac{1}{a_n}$，解得 $b_n=n^2$，

$$\therefore \quad a_n=\frac{1}{n^2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1a_n}}+\frac{1}{\sqrt{a_2a_{n-1}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_na_1}}$$

$$=1\cdot n+2\cdot(n-1)+\cdots+n\cdot 1$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

8. 解得 $a_{2n}=2^{n-1}(1+n), a_{2n+1}=2^{n-1}(2+n)$.

$\therefore \quad a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1}+\sum_{i=1}^{n}a_{2i}=3n\cdot 2^{n-1}$.

9. 与本章例8相同，值为 $\frac{10}{71}$.

练 习 四

1. $(10n+2, 10n)=2$，由性质5可知 $(F_{10n+2}, F_{10n})=F_{(10n+2, 10n)}=F_2=1$. 再由性质3，便得 $(F_{10n}, F_{12})=1$.

2. 由性质2与性质3可知，F_n 能被3整除的充要条件为 $n=4k$，故被3整除的前100个斐波那契数为

$$F_4+F_8+\cdots+F_{100}=\frac{1}{5}(3F_{101}+F_{100}-3).$$

同理被8整除的前100个斐波那契数为 $F_6+F_{12}+\cdots+F_{96}$，共有16个.

3. $(F_{1990}, F_{2000})=F_{(1990, 2000)}=F_{10}=55$.

4. 数列是二阶线性递推式给出的. 特征方程 x^2-kx+1

$=0$ 的根为

$$x_1=\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2},\qquad x_2=\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2},$$

显然 $x_1x_2=1$,数列的通项为

$$u_n=\frac{1}{x_1-x_2}\left(x_1^n-x_2^n\right),$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{\sqrt{k^2-4}}\cdot\frac{(x_1^n-1)(x_1^{n+1}-1)}{(x_1-1)\cdot x_1^n},$$

$$\sum_{k=1}^{n}u_k^3=\frac{1}{\sqrt{(k^2-4)^3}}\cdot\frac{(x_1^{3n}-1)(x_1^{3n+3}-1)}{(x_1^3-1)\cdot x_1^{3n}}$$

$$-\frac{3}{k^2-4}\cdot\sum_{k=1}^{n}u_k$$

$$\therefore\quad \frac{\sum_{k=1}^{n}u_k^3}{\sum_{k=1}^{n}u_k}=\frac{1}{(k+1)(k^2-4)}\{(x_1^{n+1}+1+x_2^{n+1})(x_1^n+1+x_2^n)$$

$$-3(x_1+x_2+1)\},$$

$\because$ $k=x_1+x_2$, 设 $(x_1^{n+1}+1+x_2^{n+1})\cdot(x_1^n+1+x_2^n)-3(x_1+x_2+1)$ 为 [1] 式, 因而 [1] 式是关于 k 的多项式. 由于 $k=2$ 时, $x_1=1$; $k=-2$ 时, $x_1=-1$; $k=-1$ 时,

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\omega_1$$

(1 的立方根). 故 $k=2$、-2 或 -1, [1] 式的值都是 0. 说明 2、-2 或 -1 是 [1]式的根. 因而含有因式 $(k-2)(k+2)(k+1)$. 于是 [1] 式 能 被 $(k^2-4)(k+1)$ 整除. 故 $\sum_{k=1}^{n}u_k^3$ 能被 $\sum_{k=1}^{n}u_k$ 整除.

7. 由数学归纳法证明 $2^{n+1}-7a_{n-1}^2=(2a_n+a_{n-1})^2$.

8．可以选定 a_1，使数列的前 100000 项全是偶数，而第 100001 项为奇数．如选 $a_1=2^{100000}-2$．此时，

$$a_2=\left[\frac{3}{2}a_1\right]+1=3\cdot 2^{99999}-3+1=3\cdot 2^{99999}-2,$$

$$a_3=\left[\frac{3}{2}a_2\right]+1=3^2\cdot 2^{99998}-2,$$

……

$$a_{99999}=\left[\frac{3}{2}a_{99998}\right]+1=3^{99998}\cdot 2^2-2,$$

$$a_{100000}=\left[\frac{3}{2}a_{99999}\right]+1=3^{99999}\cdot 2-2,$$

$$a_{100001}=\left[\frac{3}{2}a_{100000}\right]+1=3^{100000}-2.$$

练　习　五

1．令连接圆周上 k 个点中的任意两点所成的弦，至多可以把圆分为 u_k 个区域．考虑增加一个点所增加的区域块数，得递推关系式

$$u_{k+1}=u_k+k+C_k^3.$$

于是得

$$u_n=\frac{1}{2}n(n-1)+C_n^4+1\quad(C_k^4=0 \text{ 当 } k=1,2,3 \text{ 时}).$$

2．令 n 个截面最多可以分划球面区域的个数为 u_n．第 $n+1$ 个截面与球相交得一个大圆，它与前 n 个大圆各相交两点，即第 $n+1$ 个大圆被前 n 个大圆相截分为 $2(n-1)$ 个部分．得递推关系式 $u_{n+1}=u_n+2(n-1)$．于是得 $u_n=n(n-1)+2$．

3．$m+n$ 条直线将平面分成 $m(n+2)+2n-1$ 个区域．

4．令 P_n 表示在 n 次掷硬币时不接连发生两次正面向上的概率．显然 $P_1=1, P_2=\frac{3}{4}$．$n>2$ 时，分两种情况：若第一次掷时，背面朝上，那末其余 $n-1$ 次掷时不出现两次正面朝上的概率为 P_{n-1}；若第一次掷时，正面朝上，那末第二次必须反面朝上，以免连续两次出现正面，而在以后 $n-2$ 次掷币时不接连出现两次正面的概率为 P_{n-2}。

$$\therefore \quad P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2} \quad (n>2).$$

解得

$$P_n=\frac{1}{2^n\sqrt{5}}(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}).$$

α、β 分别是 $x^2-x-1=0$ 的根．于是两次正面朝上概率为 $1-\frac{F_{n+2}}{2^n}$，其中 F_{n+2} 是斐波那契数．

5．令 $ab+bc+ca=A, abc=B$．显然 $a、b、c$ 是特征方程 $x^3+Ax-B=0$ 的根．设 $x_n=a^n+b^n+c^n$．由 $a、b、c$ 是特征方程的根，得 $a^{n+3}+Aa^{n+1}-Ba^n=0$，$b^{n+3}+Ab^{n+1}-Bb^n=0$，$c^{n+3}+AC^{n+1}-BC^n=0$，相加得 $x_{n+3}+Ax_{n+1}-Bx_n=0$．又 $x_0=3, x_1=0$，$x_2=-2A$．由 $x_{n+3}=-Ax_{n+1}+Bx_n$，得 $x_3=-A\cdot x_1+Bx_0=3B$；$x_5=-Ax_3+Bx_2=-5AB$．即

$$a^5+b^5+c^5=-5\cdot\left(-\frac{x_2}{2}\right)\cdot\left(\frac{x_3}{3}\right).$$

$$\therefore \quad \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

同理可证 $$\frac{x_7}{7}=\frac{x_2}{2}\cdot\frac{x_5}{5}.$$

6．令 $a_n=\sin^n\theta+\cos^n\theta \quad (n=1,2,\cdots)$．

$$\sin^{n+2}\theta+\cos^{n+2}\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^{n+1}\theta+\cos^{n+1}\theta)$$
$$-\sin\theta\cos\theta\cdot(\sin^{n}\theta+\cos^{n}\theta).$$

即有递推关系

$$a_{n+2}-(\sin\theta+\cos\theta)a_{n+1}+\sin\theta\cos\theta\, a_n=0.$$

又由$\sin\theta+\cos\theta=a_1$, $a_1^3=\sin^3\theta+\cos^3\theta+3\sin\theta\cos\theta\cdot a_1$, $a_1^3=1+3\sin\theta\cos\theta a_1$, $a_1^2=1+2\sin\theta\cos\theta$, 解得 $a_1=1$, $\sin\theta\cos\theta=0$. 于是递推关系为

$$a_{n+2}=a_{n+1}=\cdots=a_3=a_2=a_1=1.$$

$$\therefore\quad \sin^n\theta+\cos^n\theta=1.$$

7. 令 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(3+\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n]$ 则

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)^n-\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)^n\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right]$$
$$=F_{2n}$$

$\because$ F_{2n} 是整数, 即 a_n 能被 2^n 整除, 又因为

$$0<3-\sqrt{5}<1,\quad 0<\frac{(3-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}<1,$$

$$\therefore\quad \left[\frac{(3+\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}\right]=F_n<\frac{(3+\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}.$$

故命题成立.

9. 令 n 次金属圆片按规则从甲桌移到丙桌需 a_n 次. 那末应有递推关系 $a_{n+1}=2a_n+1, a_1=1$. 解得 $a_{64}=2^{65}-1$.

10．令第 k 个内接正方形边长为 a_k，且 $B_kB_{k+1}=x$，则

$$a_{k+1}=x\csc\alpha \quad \left(0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}\right).\quad \frac{a_k-x}{x}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

得 $$x=\frac{a_k}{1+\operatorname{ctg}\alpha},\quad \therefore\quad a_{k+1}=\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}a_k.$$

于是第 n 个内接正方形面积为 $a^2\left(\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^{2n}$.

11．令第 n 次操作后容器内酒精重量为 a_n，则有递推关系

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

其中 $a_1=1$．用代换的方法，设

$$b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n-1}b_i=\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^i a_{i+1}-\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1}a_i\right]$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}a_n-a_1$$

又 $$\sum_{i=1}^{n-1}b_i=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^i=3\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right].$$

$$\therefore\quad a_n=4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

而水的重量可设为第 n 次操作后为 b_n，显然水的重量是以 $\frac{20}{3}$ 为首项，$\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列，$\therefore\ A_n=\frac{20}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$．这样 n 次操作后酒精浓度

$$C_n=\frac{a_n}{a_n+b_n}=\frac{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{20}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

$$=\frac{4-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{\frac{32}{3}-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}\cdot 100\%.$$

当 n 无限增大时浓度趋 $\frac{3}{8}=37.5\%$.

12. 用 a_n、b_n、c_n、d_n，分别表示青蛙自 A、B、C、D 各点出发经过 n 步跳到 E 点所有不同跳法的种数. 又由对称性，B 与 H，C 与 G，D 与 F 关于 A、E 两点对称，故可考虑 A、B、C、D 各点. 跳法满足递推关系式

$$\begin{cases} a_n=2b_{n-1}, \quad a_1=b_1=c_1=0, d_1=1. \\ b_n=a_{n-1}+c_{n-1}, \\ c_n=d_{n-1}+b_{n-1}, \\ d_n=c_{n-1}. \end{cases}$$

由上述关系可得 $a_{n+2}-4a_n+2a_{n-2}=0$，$a_{n+3}-4a_{n+1}+2a_{n-1}=0$，由 $a_1=0$，$a_3=0$，$a_5=0$ 可推得 n 为奇数时 $a_n=0$；$a_2=0$，$a_4=2$，可推得 n 为偶数时

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(2+\sqrt{2})^{m-1}+(2-\sqrt{2})^{m-1}\right]$$

其中 $n=2m$.

(沪)新登字116号

中学数学竞赛辅导丛书

斐波那契数列

康士凯　编著

上海科技教育出版社出版发行

(上海冠生园路393号)

各地新华书店经销　上海新华印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张3.75　字数84,000

1992年5月第1版　1992年5月第1次印刷

印数1—1,000

ISBN 7-5428-0594-0

G·595

定价：1.50元

责任编辑
洪如蕙
封面设计
范一辛

ISBN 7-5428-0594-0/G·595
价定： 1.50 元